

SÉRIE A, N° 630.

N° D'ORDRE :
1392.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. J. MALASSEZ,

Préparateur à la Sorbonne.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LES RAYONS CATHODIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 *juin* 1911, devant la Commission d'Examen

MM. ED. BOUTY,	<i>Président.</i>
HALLER,	{ <i>Examineurs.</i>
JEAN PERRIN,	

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1910





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551602_0035

Handwritten scribble or signature.

IE A, N° 630.

D'ORDRE :
1392.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. J. MALASSEZ,

Préparateur à la Sorbonne.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LES RAYONS CATHODIQUES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 *Janvier* 1911, devant la Commission d'Examen



MM. Ed. BOUTY, *Président.*
HALLER, *Examineurs.*
JEAN PERRIN, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

	MM.	
Doyen.....	P. APPELL, Professeur.	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire.....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires.	L. TROOST.	
	CH. WOLF.	
	J. RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre sup.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	Y. DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. compar.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KÖNIGS.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
Professeurs	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND..	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zool. (Évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	ÉMILE BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	G. PRUVOT.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. comp.
	N.....	Applicat. de l'Analyse à la Géométrie.
	N.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
Professeurs adjoints ...	HÉROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
	COTTON	Physique.
Secrétaire.....	D. TOMBECK.	

A LA MÉMOIRE

DE

MON PÈRE.

A MA MÈRE.

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES

SUR

LES RAYONS CATHODIQUES.

INTRODUCTION.

Le présent travail a été entrepris, suivant le conseil de M. Langevin, dans le but de justifier l'emploi fait par MM. Kaufmann ⁽¹⁾ et Simon ⁽²⁾ de la formule de Schuster ⁽³⁾, pour déterminer le quotient $\frac{e}{m}$ du nombre qui mesure la charge électrique d'un corpuscule cathodique par celui qui mesure sa masse.

Pour obtenir cette formule, Schuster avait admis que l'énergie cinétique de la particule est fournie tout entière par la chute de potentiel entre la cathode et l'anode.

En se servant de cette relation et de celle qu'on obtient en écrivant que le corpuscule en mouvement dans un espace où règne un champ magnétique est soumis à une force dont les lois de l'électromagnétisme donnent la

(1) KAUFMANN, *Wied. Ann.*, t. LXII, 1897, p. 596; t. LXV, 1898, p. 431.

(2) SIMON, *Wied. Ann.*, t. LXIX, 1899, p. 589.

(3) SCHUSTER, *Proc. Roy. Soc.*, t. XLVII, 1890, p. 526.

valeur, Kaufmann et Simon trouvèrent pour $\frac{e}{m}$ le nombre $1,86 \times 10^7$ en unités électromagnétiques C. G. S., nombre approximativement double de celui qu'on peut tirer des meilleures expériences de J.-J. Thomson, dans lesquelles il utilisait simultanément les déviations électrique et magnétique.

Ce savant objecta alors que la formule de Schuster pouvait ne pas être applicable, que les rayons cathodiques pouvaient par exemple être émis à une certaine distance de la cathode, en quel cas l'énergie cinétique eût été inférieure à l'énergie électrostatique fournie par la différence de potentiel existant entre la cathode et l'anode.

Il expliquait ainsi la divergence des résultats obtenus. M. Langevin (1) avait proposé une méthode qui permettait de vérifier l'exactitude de cette objection.

C'est cette méthode, exposée plus loin, que j'ai employée. Les résultats obtenus ont vérifié entièrement la formule de Schuster.

Comme conséquence de cette vérification, j'ai été amené à reprendre ces deux séries de mesures qui avaient conduit à des nombres si différents, c'est-à-dire les mesures de Simon et celles de J.-J. Thomson.

Ce travail comprend donc trois Parties :

1° Vérification de l'exactitude de la relation de Schuster;

2° Détermination de $\frac{e}{m}$ par la méthode de Simon;

3° Comparaison de l'expression $\frac{mv^2}{e}$ (2) déduite soit de

(1) P. LANGEVIN, *Physique de l'électron* (*Revue générale des Sciences*, 30 mars 1905).

(2) Comme nous le verrons plus loin, si l'on obtient les mêmes valeurs dans les deux cas pour cette expression, il en résulte qu'on doit trouver par ces deux procédés la même valeur de $\frac{e}{m}$.

la formule de Schuster, soit du calcul de la déviation électrique.

Avant d'exposer les dispositifs et les résultats de ces expériences, nous ferons un historique des nombreuses mesures qui ont été faites dans ce domaine.

Nous conviendrons d'exprimer tous les résultats en unités électromagnétiques C. G. S.

Ces recherches ont été effectuées à la Sorbonne au laboratoire de Physique générale de M. le professeur Pellat.

Je suis profondément reconnaissant à M. Pellat d'avoir mis à ma disposition les ressources de son laboratoire et de m'avoir si souvent prodigué ses encouragements et ses conseils.

M. Pellat avait déjà lu une grande partie de ce travail, quand la mort est venue si brusquement l'arracher à la Science et à l'affection de tous ceux qui avaient eu le bonheur de le connaître.

Je garderai des trop courtes années passées dans son laboratoire le plus précieux souvenir.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude à M. Langevin, professeur au Collège de France, qui m'a inspiré ce travail et ne m'a jamais ménagé ses excellents conseils.

HISTORIQUE.

La détermination de la valeur du quotient $\frac{e}{m}$ a donné lieu à un grand nombre de mesures, en raison des conditions très nombreuses et variées dans lesquelles ces rayons cathodiques peuvent être produits.

Il y avait grand intérêt, en effet, à montrer que ces rayons, malgré la diversité des conditions de leur production, étaient bien identiques les uns aux autres.

Maintenant qu'il n'y a plus de doute sur l'identité des

rayons cathodiques d'origines diverses, il faut surtout se préoccuper d'employer des méthodes qui présentent les meilleures garanties d'exactitude.

En dehors des tubes à vide dans lesquelles la pression est très faible, où ils furent découverts par Hittorf sous forme d'un rayonnement s'échappant de la cathode, ils peuvent être émis par des métaux dans d'autres conditions.

Frappés par la lumière ultraviolette, ils émettent des rayons cathodiques découverts par Hertz avec le zinc.

Frappés par les rayons Röntgen, les métaux lourds principalement émettent des rayons cathodiques.

Frappés par les rayons cathodiques eux-mêmes, ils émettent des rayons cathodiques.

A haute température, les métaux, le charbon, les oxydes alcalino-terreux émettent également des rayons cathodiques.

Enfin les corps radioactifs émettent également des corpuscules désignés sous le nom de *rayons β* et assimilables aux rayons cathodiques.

A tous ces modes de production des rayons cathodiques correspondent des mesures. Le nombre des déterminations du quotient $\frac{e}{m}$ est donc très grand.

Nous ne donnerons pas la description de toutes les méthodes employées. Nous nous bornerons à celles qui présentent le plus grand intérêt, soit au point de vue historique, soit au point de vue de la méthode elle-même.

Les premières mesures du quotient $\frac{e}{m}$ et de la vitesse v des rayons cathodiques ont été entreprises par J.-J. Thomson (1) au moyen de deux méthodes différentes.

Dans la première, il mesurait d'une part la quantité

(1) J.-J. THOMSON, *Phil. Mag.*, 5^e série, t. XLIV, 1897, p. 293-316.

d'électricité $Q = Ne$ transportée, pendant l'unité de temps, dans un cylindre de Faraday par N corpuscules de charge e et d'autre part leur énergie cinétique, au moyen de l'élévation de température d'un corps de capacité calorifique connue; ce qui suppose que toute l'énergie cinétique des particules se retrouve sous forme d'énergie calorifique.

On avait alors

$$\frac{1}{2} N m v^2 = W,$$

si W est l'énergie calorifique mesurée, v la vitesse et m la masse de ces particules.

Faisons le quotient de W par Q :

$$(1) \quad \frac{W}{Q} = \frac{1}{2} \frac{m v^2}{e}.$$

Pour avoir la seconde relation, J.-J. Thomson déviait le faisceau de rayons cathodiques par un champ magnétique uniforme, d'intensité H , perpendiculaire à la trajectoire des corpuscules.

Le faisceau, dévié dans un plan perpendiculaire à la direction du champ, décrit une courbe, dont le rayon de courbure ρ est donné par l'égalité

$$(2) \quad H e v = \frac{m v^2}{\rho}.$$

Des équations (1) et (2) on peut déduire les valeurs de $\frac{e}{m}$ et de v .

Posons

$$(3) \quad \frac{m v^2}{e} = \frac{2 W}{Q} = A,$$

$$(4) \quad \frac{m v}{e} = H \rho = B.$$

Les quantités A et B sont fournies directement par

l'expérience. Les valeurs de $\frac{e}{m}$ et de v sont données en fonction de ces quantités par les égalités

$$(5) \quad v = \frac{A}{B},$$

$$(6) \quad \frac{e}{m} = \frac{A}{B^2}.$$

Les méthodes employées pour déterminer ces deux grandeurs $\frac{e}{m}$ et v sont toutes basées sur le calcul de $\frac{mv^2}{e}$ et de $\frac{mv}{e}$; mais, tandis qu'on s'adresse toujours à la déviation magnétique pour obtenir $\frac{mv}{e}$, au contraire $\frac{mv^2}{e}$ peut être obtenu de différentes façons.

La seconde méthode de J.-J. Thomson ne diffère de la première que par la manière d'obtenir $\frac{mv^2}{e}$.

Pour avoir une seconde relation, ce savant s'est adressé à la déviation du faisceau cathodique, produite par un champ électrique.

Supposons que la trajectoire du faisceau soit horizontale. Derrière l'anode, qui délimitait un pinceau étroit de rayons, étaient disposés, horizontalement et parallèlement, les deux plateaux d'un condensateur. Quand les deux plateaux étaient au même potentiel, les rayons passaient entre les plateaux et à égale distance de chacun d'eux. Si au contraire on établissait une différence de potentiel, on créait entre les plateaux un champ électrique vertical. Le corpuscule cathodique de charge e est soumis à une force électrique et subit une déviation dans un plan vertical.

Prenons, pour axe des x , la ligne horizontale médiane située à égale distance des deux plateaux et, pour axe des y , la ligne verticale tangente au bord antérieur des plateaux (*fig. 1*).

Écrivons les équations du mouvement. La seule force qui agisse est la force électrique, qui a pour valeur φe , si φ est la valeur du champ électrique. Elle est verticale.

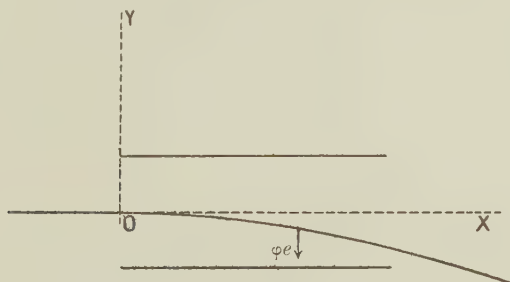


Fig. 1.

Par conséquent, les équations du mouvement sont

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \varphi e,$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0.$$

De la seconde équation on déduit immédiatement

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.} = v,$$

en appelant v cette projection de la vitesse sur l'axe des x .

Nous pouvons tirer dt de cette relation pour la porter dans la première équation du mouvement.

Il vient

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{mv^2}{e} = \varphi.$$

D'où l'on tire, par une double intégration,

$$y = \frac{e}{mv^2} \int dx \int \varphi dx.$$

Cette expression donne l'ordonnée de la courbe de déviation, pour une distance x de l'origine. L'intégrale

du champ électrique doit être prise depuis l'abscisse, pour laquelle φ est nul, jusqu'à l'abscisse x . J.-J. Thomson supposait que le champ électrique était constant entre les plateaux et nul en dehors.

Moyennant cette hypothèse, les équations se simplifient. Appelons b la longueur commune des plateaux.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en un point de coordonnées x et y a pour valeur

$$\frac{dy}{dx} = \varphi x \frac{e}{mv^2}.$$

Par conséquent, à la sortie des plateaux, ce coefficient angulaire prend la valeur

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^b = \varphi b \frac{e}{mv^2}.$$

Remarquons que la courbe décrite par le corpuscule dans ce champ uniforme est une parabole, comme le montre immédiatement l'intégration de l'équation en $\frac{dy}{dx}$.

Il en résulte, d'après une propriété connue des paraboles, que la tangente à la trajectoire au point d'abscisse b doit couper l'axe des x en un point d'abscisse $\frac{b}{2}$.

Cette tangente à la trajectoire prolongée donne la direction du faisceau cathodique en dehors des plateaux, puisque le champ est alors supposé nul.

Appelons θ l'angle formé par cette direction avec l'axe des x , l la distance du milieu des plateaux à l'écran sur lequel on lit la déviation δ :

$$\tan \theta = \frac{\delta}{l}.$$

Or $\tan \theta$ est égal à $\left(\frac{dy}{dx}\right)^b$. On a donc

$$\frac{\delta}{l} = \varphi b \frac{e}{mv^2}.$$

D'autre part, on produit un champ magnétique dont les lignes de force sont horizontales et perpendiculaires à la direction du faisceau non dévié. Le corpuscule est soumis à une force électromagnétique perpendiculaire à la direction du champ et à celle du faisceau, et par conséquent située dans un plan vertical et ayant pour valeur Hev , H étant l'intensité du champ magnétique, e la charge et v la vitesse d'un corpuscule.

On a l'équation

$$\frac{mv^2}{\rho} = Hev.$$

Or on sait que le rayon de courbure ρ est donné par la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ étant petit vis-à-vis de l'unité, on peut en première approximation le négliger et il reste

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

L'équation de déviation magnétique devient

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{He}{mv},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e}{mv} \int H dx \quad \text{et} \quad y = \frac{e}{mv} \int dx \int H dx.$$

L'intégrale du champ magnétique sera prise entre l'abscisse pour laquelle le champ est nul et l'abscisse x ; y donne la déviation correspondante.

Mais J.-J. Thomson supposait que le champ magnétique était uniforme et s'arrangeait de façon que la déviation électrique compensât la déviation magnétique.

Dans ce cas, on a simplement la relation

$$\varphi e = H e v,$$

d'où

$$v = \frac{\varphi}{H}.$$

Cette équation donnait ainsi v . Cette valeur de v , portée dans l'équation de déviation électrique, donne

$$\frac{\delta}{l} = \varphi b \frac{e H^2}{m \varphi^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{e}{m} = \frac{\delta}{l} \frac{\varphi}{b H^2}.$$

Au moyen de ces deux méthodes, J.-J. Thomson expérimenta sur plusieurs gaz, qui furent l'air, l'hydrogène et l'acide carbonique.

Avec la première méthode, il obtint pour le quotient $\frac{e}{m}$ des valeurs concordantes pour chaque tube employé, mais très différentes les unes des autres.

Ces valeurs oscillèrent entre 1,0 et 2,5. 10⁷.

Avec la seconde méthode, la précision fut meilleure. Les valeurs oscillèrent entre 0,67 et 0,91. 10⁷.

J.-J. Thomson put néanmoins conclure de ses expériences les faits capitaux suivants :

Le quotient $\frac{e}{m}$ est de l'ordre de 1 à 2. 10⁷.

Il est indépendant de la nature du gaz et de la nature de l'électrode.

Enfin, si l'on admet que la charge de l'électron est la même que celle de l'atome d'hydrogène dans l'électrolyse, la masse de l'électron est environ deux mille fois plus faible que celle de l'atome d'hydrogène.

En 1897, Kaufmann se servit, pour déterminer $\frac{e}{m}$, de la relation de Schuster, relation qui consiste à évaluer

l'énergie cinétique de la particule à l'énergie fournie par la chute de potentiel V , entre la cathode et l'anode :

$$\frac{1}{2} m v^2 = V e.$$

Cette relation fournit très simplement $\frac{e}{m v^2}$. Combinée avec l'équation de déviation magnétique, elle donne $\frac{e}{m}$ et v .

Kaufmann obtint ainsi

$$\frac{e}{m} = 1,86.10^7,$$

valeur double de celle déduite des meilleures expériences de J.-J. Thomson.

Simon reprit alors les mesures de Kaufmann, en partant des mêmes équations fondamentales, mais en prenant dans les calculs ainsi que dans le dispositif expérimental le plus grand soin.

L'anode était constituée par un cylindre de Faraday relié au sol, de sorte que les corpuscules ne subissaient plus aucune action électrostatique, une fois qu'ils avaient pénétré dans le cylindre, et gardaient alors une vitesse constante.

Cette précaution est très importante. En effet, le fond des tubes de verre ordinairement employés, fond sur lequel on observe l'impact du faisceau cathodique, se recouvre d'électricité. Cette couche d'électricité produit nécessairement une action électrostatique, de sorte que la trajectoire expérimentale ne correspond plus à la trajectoire calculée.

Une des causes de la diversité des résultats obtenus dans les premières mesures du quotient $\frac{e}{m}$ réside évidemment dans le fait que cette précaution était négligée.

Simon ne supposa pas le champ magnétique uniforme,

mais calcula la trajectoire en développant la formule du rayon de courbure et négligeant les puissances supérieures au carré de la tangente. Il arriva à la formule

$$\frac{e}{m} = \frac{2 z_0^2 V}{I^2 \left(\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right)^2} \left[1 - z_0^2 \frac{\int_0^{x_0} dx \left(\int_0^x H dx \right)^3}{\left(\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right)^3} \right];$$

z_0 , déviation lue ;

V , différence de potentiel entre la cathode et l'anode ;

I , intensité de courant ;

H , champ magnétique pour un courant d'intensité 1.

Simon fit un grand nombre d'expériences et trouva pour $\frac{e}{m}$ la valeur moyenne

$$1,865. 10^7.$$

Il opéra avec des différences de potentiel variant entre 4860 et 11840 volts.

Dans la même année, Wiechert (1) réussit à mesurer directement la vitesse des rayons cathodiques et en déduisit la valeur du quotient $\frac{e}{m}$.

Bien que les propriétés des rayons cathodiques ne puissent s'expliquer que par la convection, c'est-à-dire par le mouvement de particules chargées, il y avait grand intérêt à effectuer directement cette mesure.

Ces expériences, combinées avec celles de M. Perrin, ne peuvent plus donner lieu à aucun doute sur la nature des rayons cathodiques.

Diverses mesures pour justifier la théorie de l'émission avaient déjà été faites par Goldstein (2), Spottiswoode et

(1) E. WIECHERT, *Wied. Ann.*, t. LXIX, 1899, p. 739.

(2) GOLDSTEIN, *Monat. Ber. d. K. Akad. d. Wissensch. zu Berlin*, 1880, p. 122.

Fletscher Moulton ⁽¹⁾, par J.-J. Thomson ⁽²⁾ et Th. des
Condres ⁽³⁾.

J.-J. Thomson s'est servi du miroir tournant pour mesurer la différence entre les époques d'illumination de deux surfaces phosphorescentes, situées à des distances différentes de la cathode.

Il trouva ainsi une vitesse de 200^{km} par seconde, qu'il considéra lui-même comme beaucoup trop faible.

Des Condres se servait des oscillations électriques et put établir que cette vitesse était certainement supérieure à 2000^{km} par seconde.

C'est également au moyen des oscillations électriques que Wiechert est arrivé à effectuer la même mesure.

J'en rappellerai brièvement le principe (*fig. 2*).

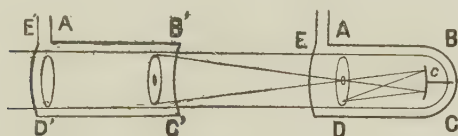


Fig. 2.

Une cathode sphérique C émet des rayons qui convergent en un point voisin du centre de la sphère et qui, après ce centre de convergence, divergent ensuite.

Un écran, percé d'un trou, est placé au point de convergence du faisceau et le laisse passer quand aucun champ ne le dévie. Dans cette région, qui contient la cathode et ce premier écran, on dispose une spire ABCDE d'un gros fil dans un plan contenant l'axe du tube, dans un

(¹) SPOTTISWOODE et FLETSCHER MOULTON, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, t. CLXXI, 1880, p. 627.

(²) J.-J. THOMSON, *Phil. Mag.*, t. XXXVIII, 1894, p. 358.

(³) Th. DES CONDRES, *Verhandl. d. Physikal. Gesellsch. zu Berlin*, t. XIV, 1895, p. 86.

plan vertical par exemple. Grâce à cette disposition, quand un courant alternatif parcourra la spire, il y aura production d'un champ magnétique également alternatif et dont les lignes de force seront horizontales et perpendiculaires à la direction du faisceau non dévié.

Par conséquent, celui-ci sera dévié dans le plan vertical de la spire et oscillera comme un pendule autour de sa position d'équilibre. Avec un aimant en fer à cheval disposé de façon que la ligne qui joint les pôles soit horizontale, on pouvait déplacer le faisceau dans le plan vertical. On s'arrangeait de manière que ce fût à l'extrémité d'une oscillation que les rayons pussent traverser le trou.

Les rayons pouvaient alors se propager au delà du premier écran et rencontraient un second écran percé d'un trou derrière lequel se trouvait un troisième écran, recouvert d'une substance phosphorescente.

Au niveau des deux derniers écrans et dans le plan du premier circuit se trouvait un second circuit $A'B'C'D'E'$ qui pouvait être parcouru également par un courant alternatif.

Supposons que le courant oscillatoire qui parcourt les deux circuits soit en concordance de phase.

Pour l'un des maxima du courant, le faisceau passera à travers le premier trou et atteindra le second écran. Si les rayons s'étaient propagés avec une vitesse infinie, le second circuit produirait une déviation maximum sur l'écran phosphorescent; mais si, par exemple, pendant le temps que les rayons mettent à aller du premier écran au second, il s'est écoulé un quart de période, le champ produit par la spire $A'B'C'D'$ sera nul et le faisceau ne subira aucune déviation sur l'écran phosphorescent. Il suffit donc de déplacer la seconde spire, pour obtenir ce résultat.

Appelons λ la longueur d'onde du courant oscillatoire, δ la distance des deux circuits.

La vitesse v des rayons cathodiques sera reliée à la

vitesse V de la lumière par la relation

$$\frac{v}{V} = \frac{\delta}{\frac{\lambda}{4}}.$$

Les oscillations étaient produites au moyen de la décharge d'un condensateur; la longueur d'onde du système oscillant était déterminée par le dispositif de Lecher et les rayons cathodiques étaient produits par un système en connexion avec celui producteur des oscillations.

Ces expériences très délicates ont demandé beaucoup d'ingéniosité à leur auteur, mais ne sont pas susceptibles d'une grande précision. La distance δ , en particulier, paraît difficile à déterminer avec une grande exactitude.

La déviation magnétique fournit à M. Wiechert une seconde équation lui permettant de déterminer $\frac{e}{m}$.

Il trouva ainsi, pour ce quotient, une valeur oscillant entre 1,01 et $1,55 \times 10^7$.

La divergence des résultats obtenus, d'une part par J.-J. Thomson et d'autre part par Kaufmann et Simon, engagea Seitz à reprendre ces mesures au moyen des trois méthodes suivantes :

1° La méthode de Kaufmann et Simon, basée sur l'emploi de la formule de Schuster et de l'équation de la trajectoire du corpuscule dans le champ magnétique ;

2° La méthode des déviations électrique et magnétique combinées, employée par J.-J. Thomson, et dont le principe avait été donné par Wien et Lénard ;

3° La méthode basée sur la mesure de l'énergie cinétique des rayons cathodiques, par l'élévation de température que subissait un corps de capacité calorifique connue, sous l'influence du bombardement de ces particules, et sur la déviation magnétique, méthode due à J.-J. Thomson et employée par lui.

Ces trois méthodes ont été essayées par Seitz sur un même tube.

De la première méthode il y a peu de chose à dire, l'auteur n'en parlant lui-même que très brièvement.

Il trouva par cette méthode $1,87.10^7$, nombre pratiquement identique à celui trouvé par Simon.

Dans la seconde méthode, Seitz ⁽¹⁾ a comparé les valeurs de la différence de potentiel entre la cathode et l'anode, qui, d'après la formule de Schuster, doit être égale à $\frac{1}{2} \frac{mv^2}{e}$,

à l'expression $\frac{\int dx \int \varphi dx}{2\gamma}$, qui, d'après le calcul de la déviation électrique, doit être égale aussi à $\frac{1}{2} \frac{mv^2}{e}$.

Le champ φ , qui figure dans cette expression, était produit par les deux plateaux d'un condensateur.

Pour connaître la valeur de φ en tous les points de l'axe, Seitz se servait des formules données par Maxwell sur la répartition du champ produit par un condensateur plan.

Il calculait graphiquement la double intégrale. L'accord entre ces deux valeurs fut très satisfaisant. Les moyennes ne différaient l'une de l'autre que de 0,9 pour 100.

Enfin Seitz reprit aussi la méthode de mesure de l'énergie apportée par les rayons cathodiques, méthode qui est la plus sujette aux erreurs.

Pour cela, dans le même tube, il remplaçait l'écran fluorescent, sur lequel il effectuait les mesures, par un bolomètre.

La branche bolométrique du pont de Wheatstone, qui recevait le faisceau cathodique, était formée de bandes de 2^{mm} de large et de 9^{mm} de long, de minces feuilles de platine de 0^{mm},1 d'épaisseur, soudées aux fils de platine.

(1) SEITZ, *Ann. der Physik*, t. VIII, 1902, p. 231.

La mesure de la quantité de chaleur se faisait au moyen de la méthode de Kurlbaum (¹).

Cette méthode est la suivante : on commençait par écarter du bolomètre les rayons cathodiques au moyen d'un aimant et l'on établissait l'équilibre du pont.

Soit I_1 l'intensité du courant circulant dans la branche bolométrique de résistance R_1 .

Puis on faisait tomber le faisceau sur la même branche, ce qui produisait une déviation α_1 au galvanomètre.

On écartait à nouveau le faisceau et l'on augmentait l'intensité du courant, de façon que, par la variation de la résistance de la branche bolométrique, on ait une déviation α_2 , de l'ordre de grandeur de α_1 .

Soient I_2 l'intensité du courant, R_2 la résistance de la branche.

La déviation α_1 était proportionnelle à Q .

La déviation α_2 était proportionnelle à $R_2 I_2^2 - R_1 I_1^2$.

On a donc

$$Q = C \frac{\alpha_1}{\alpha_2} (R_2 I_2^2 - R_1 I_1^2).$$

Seitz déterminait également la quantité d'électricité reçue q . Le quotient $\frac{Q}{q}$ lui donnait $\frac{1}{2} \frac{mv^2}{e}$ et lui permettait de comparer cette quantité avec la différence de potentiel entre la cathode et l'anode.

Le résultat fut satisfaisant.

Le quotient de ces deux quantités fut, pour deux moyennes différentes, 0,83 et 0,86.

En résumé, l'accord des résultats obtenus par Seitz semble montrer déjà que les divergences entre les nombres obtenus par les différentes méthodes ne proviennent que des défauts de précautions expérimentales.

On pourrait cependant objecter encore qu'il ne semble

(¹) KURLBAUM, *Ann. de Wied.*, t. LI, 1894.

pas que M. Seitz ait pris des précautions suffisantes pour empêcher les actions électrostatiques nuisibles.

On sait que les corpuscules cathodiques peuvent traverser une mince feuille d'aluminium que les molécules d'air ne peuvent traverser. Cette propriété, découverte par Lénard, a fait appeler *rayons de Lénard* les rayons cathodiques ainsi sortis du tube qui les a produits.

M. Lénard ⁽¹⁾ a déterminé la vitesse v et le quotient $\frac{e}{m}$ relatifs à ces rayons par la méthode des déviations électrique et magnétique combinées.

Nous n'entrerons pas dans le détail de ces expériences classiques, dont la disposition rappelle celle qu'avait employée J.-J. Thomson.

Il trouva ainsi pour $\frac{e}{m}$ une valeur voisine de $0,6 \times 10^7$. Ce nombre, beaucoup plus petit que ceux qui avaient été obtenus par d'autres expérimentateurs avec les rayons cathodiques, tendrait à faire croire à une modification des rayons cathodiques, produite par le passage de ceux-ci à travers la feuille d'aluminium.

Pour élucider cette question, d'autres savants reprirent ces mesures.

Seitz détermina $\frac{e}{m}$ pour les rayons de Lénard et trouva un nombre extrêmement voisin de celui donné par Lénard au moyen de la même méthode.

La petitesse de la valeur trouvée doit être attribuée à une erreur systématique commise par ces deux auteurs. Ils supposaient en effet, pour calculer la déviation produite par le champ électrique régnant entre les deux plateaux, que ce champ était constant entre les plateaux et nul au dehors.

Seitz constata toutefois que la déviabilité des rayons qui avaient traversé la feuille d'aluminium était identique

(¹) LÉNARD, *Wied. Ann.*, t. XLIV, 1898, p. 279, et t. XLV, p. 504.

à celle des rayons qui ne l'avaient pas traversée. Il excluait donc ainsi toute modification de la nature des rayons cathodiques, causée par le passage à travers une lame métallique mince.

Stark ⁽¹⁾ étudia les déviations électrique et magnétique des rayons cathodiques soit réfléchis par divers métaux, soit transmis à travers une mince feuille d'aluminium, pour réfuter les opinions de E. Gehrke ⁽²⁾ et Leithauser ⁽³⁾, qui pensaient pouvoir conclure de leurs expériences à une non-homogénéité des rayons, soit réfléchis, soit transmis.

Stark eut recours à la disposition employée par Kaufmann pour l'étude des rayons β du radium, c'est-à-dire à la disposition des champs électrique et magnétique parallèles. Les déviations sont rectangulaires et la courbe de déviation photographiée sur le fond du tube donne la courbe de dispersion des rayons cathodiques en fonction de la vitesse.

Stark constata ainsi que les rayons transmis avaient des vitesses très différentes allant de $5,6.10^9$ à $3,6.10^9$, mais le même $\frac{e}{m}$ en moyenne et oscillant entre 1,8 et $1,9.10^7$.

Becker ⁽⁴⁾ reprit cette détermination de $\frac{e}{m}$ pour les rayons de Lénard par une méthode différente.

Le dispositif expérimental était le suivant :

Les rayons cathodiques sortaient, par une mince feuille d'aluminium, du tube qui les avait produits et pénétraient dans un tube, où l'on avait fait un vide très complet.

Dans ce tube, les rayons passaient à travers les trous de deux diaphragmes, réunis au sol, qui avaient pour but

(1) STARK, *Berichte der deutsch. Physik. Gesell.*, 1903, p. 14.

(2) GEHRKE, *Berl. Ber.*, 8 avril 1901.

(3) LEITHAUSER, *Berl. Ber.*, 13 mars 1902.

(4) BECKER, *Ann. der Phys.*, t. XVII, 1905, p. 383.

de délimiter un pinceau étroit de rayons et de protéger la plaque photographique, située dans le fond de l'appareil, de toute lumière parasite. Puis ils pénétraient enfin dans un cylindre de Faraday.

Ce cylindre pouvait être, soit réuni aux diaphragmes, soit porté à un potentiel différent. Dans ce dernier cas, on créait ainsi un champ électrique parallèle à la direction de propagation des rayons cathodiques, et suivant le sens de cette différence de potentiel, on pouvait faire subir aux rayons soit une accélération, soit un retard.

M. Lénard avait déjà employé un dispositif analogue. Celui de Becker en diffère principalement par le soin apporté à éliminer les actions électrostatiques parasites.

L'impact du faisceau cathodique se produisait sur une plaque photographique placée verticalement dans le fond du cylindre.

On produisait un champ magnétique au moyen de bobines parcourues par un courant, et dont les lignes de forces étaient, par exemple, perpendiculaires au plan vertical contenant l'axe du tube et par suite à la trajectoire du faisceau non dévié.

Ce champ magnétique H déviait les rayons cathodiques dans un plan vertical. Suivant qu'on produisait une accélération ou un retard, on avait une valeur différente pour la déviation magnétique qu'on mesurait sur la plaque photographique.

Si l'on appelle V_0 la différence de potentiel sous laquelle sont produits les rayons cathodiques, $-V_1$ et $+V_2$ les différences de potentiel négative et positive auxquelles on porte successivement le cylindre, on a pour le quotient $\frac{e}{m}$ les formules données par Simon :

$$\frac{e}{m} = \frac{2z_1'^2 (V_0 - V_1)^2}{I_1^2 \left(\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right)^2}, \quad \frac{e}{m} = \frac{2z_2'^2 (V_0 + V_2)^2}{I_2^2 \left(\int_0^{x_0} dx \int_0^x H dx \right)^2}.$$

Les déviations z'_1 et z'_2 sont les déviations corrigées d'après la formule donnée par Simon

$$z' = z \left(1 - z^2 \frac{\int_0^{r_0} dx \left(\int_0^r H dx \right)^3}{\left(\int_0^{r_0} dx \int_0^r H dx \right)^3} \right);$$

I_1 et I_2 sont les intensités de courant. $\int H dx$ représente l'intégrale du champ magnétique pour un courant unité circulant dans les bobines.

Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait qu'on peut déterminer V_0 en dehors de toute hypothèse.

En effet, en égalant les deux valeurs de $\frac{e}{m}$ écrites précédemment, on peut déduire facilement la valeur de V_0 .

$$V_0 = \frac{\frac{z_1'^2}{z_2'^2} V_1 I_2^2 + V_2 I_1^2}{\frac{z_1'^2}{z_2'^2} I_2^2 - I_1^2}.$$

Toutes les quantités qui figurent dans cette expression sont données par les mesures directes. On en déduit V_0 . V_0 représente simplement la différence de potentiel sous laquelle les rayons cathodiques sont produits et à laquelle ils doivent leur énergie cinétique.

Becker obtint ainsi pour $\frac{e}{m}$ la valeur $1,747 \cdot 10^7$ pour la vitesse $v = 1,11 \cdot 10^{10}$ et $1,847$ pour des vitesses faibles.

Ces deux nombres sont assez différents malgré la correction qu'on pourrait faire subir au premier pour tenir compte du changement de masse avec la vitesse.

En tous cas, les nombres donnés par Stark et Becker pour le rapport $\frac{e}{m}$ des rayons de Lénard se rapprochent des nombres trouvés par les autres expérimentateurs sur les rayons cathodiques directement.

Il semble, comme le montrent les résultats donnés par Stark et Becker, qu'on ne puisse pas attendre une bien grande précision des mesures faites sur les rayons de Lénard, probablement à cause de la difficulté d'obtenir un faisceau bien défini.

Récemment M. Bestelmeyer ⁽¹⁾ a mesuré $\frac{e}{m}$ et v pour les rayons cathodiques secondaires produits par l'action des rayons Röntgen sur les métaux lourds.

Le principe de la méthode consistait à faire passer les rayons cathodiques ainsi produits entre les plaques très rapprochées d'un condensateur.

Un champ magnétique, parallèle aux plateaux et perpendiculaire au rayon, les déviait en sens inverse.

On pouvait ainsi annuler la déviation produite, si l'on réalisait la condition

$$eF = evH,$$

F étant le champ électrique et H le champ magnétique. Une fois sortis du condensateur, les corpuscules étaient déviés par le champ magnétique, et, comme ils constituaient une nappe, au sortir du condensateur, ils décrivaient, suivant leur inclinaison, une hélice de rayon

$$r_0 = \frac{m}{eH} v.$$

De la valeur de r_0 et de la relation précédente on pouvait déduire $\frac{e}{m}$ et v .

La valeur ainsi trouvée fut de $1,72 \cdot 10^7$.

La précision de ces mesures est, d'après le dire de l'auteur, sujette à caution.

Récemment, M. Classen ⁽²⁾ a déterminé le quotient $\frac{e}{m}$

⁽¹⁾ BESTELMEYER, *Ann. der Physik*, t. XXII, 1907, p. 429.

⁽²⁾ CLASSEN, *Physik. Zeitschr.*, t. IX, novembre 1908, p. 768.

d'une manière très élégante, en se servant de rayons cathodiques lents, émis par une cathode de Wehnelt.

La cathode était placée tout près d'une anode percée d'un trou, de façon à laisser passer le faisceau cathodique.

Entre la cathode et l'anode on avait établi une différence de potentiel pour donner aux corpuscules la vitesse suffisante.

Le tube était placé entre deux bobines identiques de même axe, et le champ magnétique qu'elles produisaient était perpendiculaire à la direction du faisceau non dévié.

La déviation se produisait dans un espace où le champ pouvait être considéré comme très sensiblement constant.

Grâce à cette disposition, la longueur sur laquelle se répartit la chute de potentiel cathodique est extrêmement petite, et, dès leur entrée dans le champ, les rayons cathodiques possèdent leur vitesse définitive.

Le champ magnétique leur fait décrire un demi-cercle, et ils viennent frapper une plaque photographique annulaire disposée sur l'anode.

Des équations bien connues

$$\frac{1}{2} m v^2 = V e \quad \text{et} \quad \frac{m v^2}{R} = H e v$$

on tire $\frac{e}{m}$ et v .

Des mesures ainsi obtenues sont très concordantes entre elles. La valeur moyenne de $\frac{e}{m}$ fut trouvée égale à

$$1,774 \cdot 10^7.$$

En raison de la simplicité de la méthode et du petit nombre de déterminations des constantes, ce nombre doit être considéré comme très exact.

Plus récemment encore ⁽¹⁾, M. Kurt Wolz a repris la

(1) KURT WOLZ, *Ann. d. Phys.*, t. XXX, 1909, p. 273-288.

méthode des champs croisés déjà employée par M. Bestelmeyer et par Bücherer, d'après un dispositif qui rappelle beaucoup celui de ce dernier auteur.

La source de rayons est un grain de fluorure de radium. L'auteur, en éliminant les différentes causes d'erreur, trouve pour le rapport $\frac{e}{m_0}$ la valeur finale de

$$1,7674 \cdot 10^7 \quad \text{à} \quad \frac{1,5}{1000} \text{ près.}$$

PREMIÈRE PARTIE.

On a vu que J.-J. Thomson, au moyen des méthodes de déviations électriques et magnétiques combinées, avait trouvé pour $\frac{e}{m}$ une valeur beaucoup plus faible que celle donnée par Simon, qui utilisait la différence de potentiel entre la cathode et l'anode, et la déviation magnétique. J.-J. Thomson pensait que cette divergence ne pouvait pas être imputable à des erreurs expérimentales et avait énoncé l'hypothèse que les rayons cathodiques n'étaient pas émis sous la différence de potentiel existant entre la cathode et l'anode, mais prenaient naissance à une certaine distance de celle-ci. Il en résulterait que l'énergie cinétique d'une particule serait inférieure au produit Ve , en appelant V cette différence de potentiel et e la charge de cette particule.

Dans le but de soumettre à l'expérience cette hypothèse, j'ai utilisé une méthode indiquée par M. Langevin.

Cette méthode consiste à faire remonter aux corpuscules une différence de potentiel supplémentaire V' et à comparer leur déviabilité avant et après cette adjonction.

En effet, si V_1 est la différence de potentiel entre la

région où sont émis les corpuscules et l'anode, m la masse, e la charge et v la vitesse d'un corpuscule, on a la relation

$$(1) \quad \frac{1}{2} m v^2 = V_1 e.$$

Si l'on dévie le corpuscule soustrait à tout champ électrique par un champ magnétique perpendiculaire à sa trajectoire, on a la relation

$$(2) \quad \frac{m v^2}{\rho} = H e v,$$

H étant l'intensité du champ magnétique et ρ le rayon de courbure au point de la trajectoire considéré.

Faisons maintenant remonter au corpuscule une différence de potentiel V' ; l'équation (1) devient

$$(3) \quad \frac{1}{2} m v'^2 = (V_1 - V') e,$$

v' étant la nouvelle vitesse du corpuscule, inférieure à v . Le champ magnétique restant le même, le corpuscule décrit une courbe dont le rayon de courbure ρ' est donné par

$$(4) \quad \frac{m v'^2}{\rho'} = H e v'.$$

De la combinaison des équations (1) et (3) on tire la relation

$$(5) \quad \frac{V_1}{V_1 - V'} = \frac{v^2}{v'^2}.$$

D'autre part, la combinaison des équations (2) et (4) donne

$$(6) \quad \frac{v^2}{v'^2} = \frac{\rho^2}{\rho'^2}.$$

Si le champ magnétique était uniforme, il serait facile de déterminer les rayons de courbure au moyen des

taches lumineuses produites par les rayons cathodiques sur une plaque fluorescente, placée perpendiculairement à la direction qu'aurait le faisceau non dévié. Mais le champ magnétique n'est pas uniforme. La détermination des rayons de courbure serait compliquée et la formule précédente n'est plus applicable en toute rigueur pour deux points des trajectoires correspondant à la même abscisse, car, pour ces deux points, le champ n'est plus le même.

Il est préférable, sans changer sa distribution, de modifier l'intensité du champ magnétique de façon à avoir même déviation dans les deux cas. Alors, les deux trajectoires ont même rayon de courbure en chaque point correspondant, et sont exactement superposables.

En effet, si la vitesse v' est devenue dans le second cas une fraction $\frac{v'}{n}$ de ce qu'elle était dans le premier, il suffit que le champ devienne n fois plus faible pour que le rayon de courbure garde la même valeur.

Si H' est la valeur du champ magnétique après l'adjonction de la différence de potentiel, au point où il était H , avant, on a

$$(7) \quad \frac{V_1}{V_1 - V'} = \frac{H^2}{H'^2} \quad \text{ou} \quad \frac{V'}{V_1} = \frac{H^2 - H'^2}{H^2}.$$

Il suffit alors de comparer la valeur de $\frac{V'}{V_1}$ qui est donnée par $\frac{H^2 - H'^2}{H^2}$, facilement mesurable avec $\frac{V'}{V}$, V étant la différence de potentiel entre la cathode et l'anode, qu'on peut mesurer avec un électromètre.

(¹) M. J. Perrin (Thèse, 1897) avait déjà obtenu une mesure approchée de la chute de potentiel à laquelle les rayons cathodiques doivent leur énergie.

Dans ce but, les rayons cathodiques traversaient une anode percée

Si l'équation de Kaufmann-Simon est exacte, on aura

$$\frac{V'}{V_1} = \frac{V'}{V}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad V_1 = V.$$

Si l'hypothèse de J.-J. Thomson est exacte, on aura

$$\frac{V'}{V_1} > \frac{V'}{V}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad V_1 < V.$$

Dispositif expérimental. — Le tube qui m'a servi était construit de la façon suivante (*fig. 3*) :

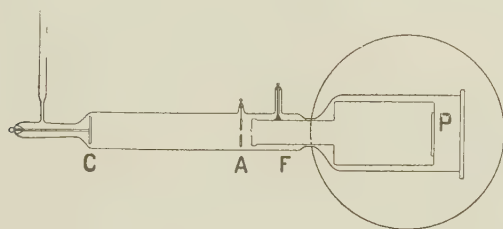


Fig. 3.

Une cathode plane C, de 2^{cm} de diamètre, se trouvait à une distance de 12^{cm} de l'anode A, qui était percée d'un trou de 2^{mm} environ.

Derrière cette anode se trouvait un cylindre de Faraday de 14^{cm},4 de longueur, percé d'un petit trou également. Un fil de platine était tendu sur ce trou.

Le fond du cylindre était formé par un couvercle muni

d'un trou et remontaient une différence de potentiel qu'on créait entre l'anode et une électrode située derrière celle-ci.

Il constata ainsi qu'en faisant croître à partir de zéro cette différence de potentiel, il arrive un moment où les rayons ne viennent plus former d'impact sur l'électrode recouverte d'une poudre fluorescente. Ce dispositif permet de mesurer la différence de potentiel à laquelle les rayons cathodiques doivent leur énergie, mais ne montre pas que celle-ci soit égale à la différence de potentiel entre la cathode et l'anode.

Il est vrai que, dans une autre expérience, M. J. Perrin, en reliant les deux cathodes extrêmes, montra qu'il n'y avait aucune lumière sur la cathode fluorescente. Mais il ne s'agit là que d'une expérience qualitative.

d'une fente verticale, et sur cette fente était appliquée une plaque de verre d'urane, divisée en millimètres.

C'est sur cette plaque que venait se former l'ombre du fil tendu horizontalement.

L'ombre du fil était donc parallèle aux traits de la plaque. Le champ magnétique était produit par deux bobines de même diamètre, recouvertes d'une seule couche de fil et ayant leurs axes dans le prolongement l'un de l'autre.

Elles étaient montées sur des supports à glissières, de façon que cette dernière condition fût réalisée, quel que pût être l'écartement des deux joues voisines.

Le tube étant placé dans la position convenable entre les bobines, on rapprochait celles-ci l'une de l'autre, jusqu'à ce qu'elles vinssent en contact avec la partie rétrécie du tube. La partie renflée contenant le cylindre pénétrait à l'intérieur même des bobines.

De cette façon, grâce au faible écartement des bobines, on pouvait avoir un champ à peu près uniforme dans une grande partie du tube autour de l'axe.

Le tube était alimenté par une machine électrostatique mue par un moteur électrique.

Dans mes premières expériences, chaque pôle de la machine était relié à une armature extrême d'une batterie en cascades, composée de quatre jarres. L'armature positive était reliée à l'anode et l'armature négative à la cathode au moyen de tubes d'eau. Enfin, en réunissant l'une des armatures intermédiaires au cylindre de Faraday, on pouvait faire remonter aux rayons cathodiques une fraction de la différence de potentiel existant entre la cathode et l'anode.

On mesurait les différences de potentiel V et V' au moyen d'un électromètre. Dans mes premières expériences, n'ayant à ma disposition que l'électromètre Bichat et Blondlot, c'est celui que j'employais.

L'appareil était enfermé dans une vaste boîte métallique reliée au sol, qui la mettait à l'abri des courants d'air.

La différence de potentiel était donnée par la formule

$$V = \sqrt{4pgL \frac{R_2}{R_1}};$$

R_2 , rayon du cylindre extérieur ;

R_1 , rayon du cylindre intérieur ;

p , masse mise sur le plateau de la balance ;

g , accélération de la pesanteur ;

L , le logarithme népérien.

L'intensité du courant, qui circulait dans les bobines, était mesurée au moyen d'un ampèremètre donnant le déci-ampère.

La marche d'une expérience était la suivante :

L'anode et le cylindre étant réunis, on mesurait la différence de potentiel V entre la cathode et l'anode, et, aussitôt après, on produisait, au moyen du champ magnétique, une certaine déviation du faisceau cathodique. A l'aide d'un rhéostat, on réglait l'intensité du courant pour que cette déviation fût d'un certain nombre de millimètres. On mesurait l'intensité de ce courant.

On diminuait ensuite la vitesse des rayons cathodiques arrivant dans le cylindre, en leur faisant remonter une différence de potentiel V' , établie entre l'anode et le cylindre. On mesurait V' . La déviation du faisceau cathodique ayant augmenté, on la ramenait à ce qu'elle était précédemment, en diminuant l'intensité du courant. Soit i' cette nouvelle intensité.

Les champs en un même point étant proportionnels à l'intensité du courant, l'équation (7) devient

$$\frac{V'}{V_1} = \frac{i^2 - i'^2}{i^2}.$$

Je donnerai le résultat des dix dernières mesures effectuées avec ce dispositif.

Les différences de potentiel sont exprimées en volts :

V.	V'.	$\frac{V'}{V}$	$\frac{i^2 - i'^2}{i^2} = \frac{V'}{V_1}$
8948	5752	0,65	0,60
7069	3378	0,48	0,49
5177	2237	0,44	0,47
6941	3507	0,51	0,52
7275	3739	0,52	0,47
8340	5144	0,62	0,59
7536	3637	0,50	0,49
7947	4107	0,52	0,48
5220	2280	0,44	0,47
Moyenne de $\frac{V'}{V}$			0,50
Moyenne de $\frac{V'}{V_1}$			0,49

On doit en conclure qu'au degré de précision des mesures la différence de potentiel V entre la cathode et l'anode est égale à la différence de potentiel V' , sous laquelle les rayons cathodiques sont produits.

C'est donc à partir de la surface même de la cathode qu'ils reçoivent l'énergie cinétique due à cette chute de potentiel.

Toutefois, ces nombres présentent des différences individuelles notables, dues à diverses causes d'erreurs.

En dépit d'un chauffage prolongé, il y avait toujours des gaz occlus dans la masse métallique assez considérable qui constituait le cylindre de Faraday. Aussi, le vide changeait-il d'une mesure à l'autre. Le débit de la machine n'était pas très constant. Et enfin, la mesure des différences de potentiel de cet ordre était assez difficile avec l'électromètre Bichat et Blondlot.

DEUXIÈME SÉRIE DE MESURES. — Il m'a paru intéressant

de reprendre ces expériences, dans le but d'avoir une meilleure précision.

Pour la mesure des différences de potentiel, je me suis servi d'un appareil imaginé par M. Pellat, pour la mesure des pouvoirs inducteurs spécifiques, et qui peut très facilement servir d'électromètre absolu.

Cet appareil, qui rappelle l'électromètre de lord Kelvin, comportait un plateau horizontal P (*fig. 4*), de 4^{cm} de

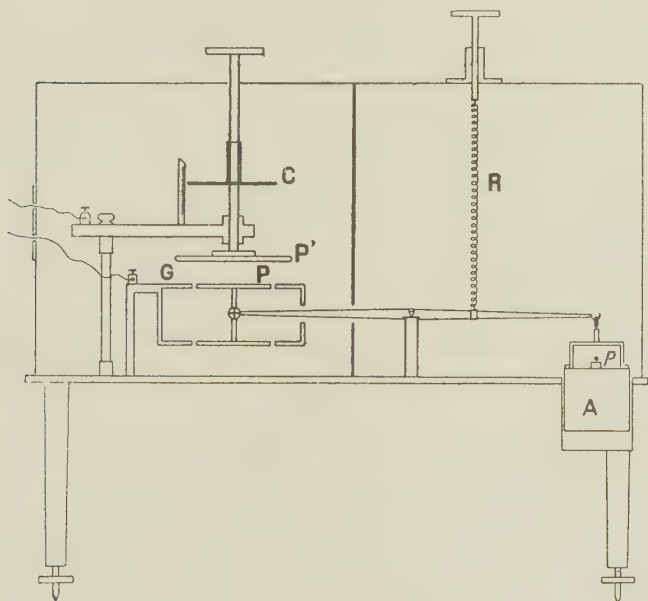


Fig. 4.

diamètre, entouré d'un anneau de garde G et fixé à l'extrémité du fléau d'une balance.

L'autre extrémité du fléau portait un plateau *p*, où l'on pouvait mettre des poids. Un amortisseur à air, du système Curie, disposé sous ce plateau, permettait des mesures rapides. Enfin, un ressort R, convenablement choisi, fixé d'une part à la cage de l'appareil et de l'autre à l'un

des bras du fléau, permettait d'obtenir un équilibre stable.

Le second plateau P' du condensateur pouvait être approché ou éloigné du premier au moyen d'une vis, dont le pas était d'un demi-millimètre. Un cercle C , divisé en cinq cents parties, dont le plan était perpendiculaire à la vis, était solidaire du plateau P' et permettait d'évaluer la distance des deux plateaux au millième de millimètre près.

Cette précision était d'ailleurs supérieure à celle que je pouvais attendre des autres mesures.

J'avais vérifié avec soin l'égalité des deux bras du fléau. On mettait des poids convenables dans le plateau de la balance, et l'on réglait, au moyen du ressort, l'équilibre, de façon que le plateau P fût dans le plan de l'anneau de garde.

On pouvait s'assurer si cette condition était réalisée, au moyen d'un microscope à réticule fixé à la cage de l'appareil, qui visait une plaque de verre verticale solidaire du plateau mobile et sur laquelle étaient tracés deux traits en croix.

Puis on enlevait un certain poids du plateau de la balance. L'équilibre était alors rompu; le plateau baissait, et le fléau venait buter contre un taquet, disposé de façon à écarter très peu le plateau P du plan de son anneau de garde.

L'appareil est alors prêt pour la mesure d'une différence de potentiel.

Le plateau inférieur et l'anneau de garde sont reliés à la cage de l'instrument et à l'un des pôles de la source électrique; le plateau supérieur, à l'autre pôle. Pour une distance convenable du plateau supérieur, le plateau mobile est attiré, et, en réglant la distance du plateau supérieur, on arrive à maintenir le plateau mobile dans le plan de l'anneau de garde. Comme le potentiel de la source

électrique n'est jamais complètement fixe, le plateau mobile oscille; mais, en agissant constamment sur la vis, on arrive à ce que ces oscillations se fassent autour de la position pour laquelle le plateau mobile et l'anneau de garde sont dans le même plan.

La relation qui donne la différence de potentiel est la suivante :

$$V = \frac{e}{r} \sqrt{8pg},$$

r étant le rayon du plateau mobile;

e , la distance des deux plateaux;

p , la masse enlevée;

g , l'accélération de la pesanteur.

En réalité, cette formule doit être modifiée légèrement pour tenir compte de l'épaisseur du sillon, qui sépare le plateau mobile de l'anneau. On obtient cette correction, en ajoutant au diamètre l'épaisseur du sillon.

Le diamètre était de 4^{cm},01; l'épaisseur du sillon, de 0^{cm},06.

En effectuant les calculs, on trouve

$$V = e\sqrt{p} \ 45,53 \quad \text{en unités électrostatiques.}$$

Un électromètre absolu n'était pas nécessaire pour ces mesures relatives. Mais celui-là convenait fort bien pour l'ordre de grandeur des différences de potentiel à mesurer. Il était d'ailleurs intéressant de connaître en valeur absolue ces différences de potentiel.

Pour mesurer l'intensité du courant, n'ayant pas à ma disposition d'ampèremètres suffisamment précis, je me servais du procédé de mesure suivant bien connu :

Le courant i qui circulait dans les bobines passait dans une résistance r , en manganine, connue avec précision. On opposait alors, à la différence de potentiel ohmique ri , une différence de potentiel variable RI , produite aux extré-

mités d'une résistance variable R par un courant constant d'intensité I , suivant la méthode du potentiomètre.

On se servait de l'électromètre capillaire comme instrument de zéro.

Quand ces deux différences de potentiel sont égales, on a

$$ri = R_1 I.$$

Si, au lieu d'opposer la différence de potentiel ri , on oppose un élément Weston de force électromotrice e , on a

$$e = R_2 I;$$

de ces deux équations l'on tire :

$$i = \frac{e}{r} \frac{R_1}{R_2},$$

ce qui permet de connaître i en valeur absolue. Dans les mesures présentes il n'était pas nécessaire de connaître i en valeur absolue. Il suffit de remarquer que i est proportionnel à R . Mais, dans la détermination de $\frac{e}{m}$ en valeur absolue, il est nécessaire de connaître l'intensité du courant et la différence de potentiel en valeur absolue.

Je n'aurai donc pas à y revenir plus tard.

Comme source électrique, je me suis servi, pour alimenter la décharge principale, entre la cathode et l'anode, d'une machine électrostatique à influence à six plateaux du type Bonnetti, dont les pôles étaient réunis aux armatures d'une forte batterie de six jarres. La machine était mue par un moteur et, grâce à la batterie, le débit était suffisamment constant.

Enfin, pour produire la différence de potentiel supplémentaire entre l'anode et le cylindre, je me servais de la batterie d'accumulateurs du laboratoire d'enseignement de la Physique à la Sorbonne, qui permet d'obtenir jusqu'à 17 000 volts. Avec cette batterie la différence de

potentiel entre la cathode et l'anode pouvait être considérée comme très constante pendant l'intervalle d'une mesure.

Des résistances d'eau étaient interposées entre les pôles des sources électriques et les électrodes du tube, afin d'éviter les décharges parasites et de régulariser le débit.

Avec ces nouvelles précautions, j'ai recommencé mes anciennes mesures, en me servant de la différence de potentiel supplémentaire pour diminuer la vitesse des rayons cathodiques.

Les résultats ont été très satisfaisants, comme on le verra plus loin. Puis j'ai utilisé cette même différence de potentiel pour augmenter la vitesse des rayons.

Les équations au signe près de cette différence de potentiel sont les mêmes. Mais les résultats, quoique satisfaisants, ont été moins bons, pour diverses raisons qu'il était aisé de prévoir.

1° *Mesures faites avec la différence de potentiel retranchée.* — La disposition expérimentale correspond au schéma ci-après (*fig. 5*). Les deux pôles de la machine étaient reliés aux deux armatures de la batterie B. L'armature négative elle-même était reliée à la cathode K, l'armature positive à l'anode A. Le pôle positif de la batterie d'accumulateurs était en connexion avec l'anode, qui était au sol, et le pôle négatif avec le cylindre.

Un premier commutateur permettait, soit de faire communiquer l'anode et le cylindre, soit d'interposer entre eux la différence de potentiel de la batterie.

Un second commutateur permettait de relier au plateau supérieur de l'électromètre, qui était isolé, soit la cathode, soit le cylindre; le plateau mobile était relié constamment à la cage de l'instrument, c'est-à-dire au sol, ainsi que l'anode.

Ceci posé, tandis que je produisais une déviation de

la tache fluorescente sur le fond du cylindre, au moyen du champ magnétique qu'on pouvait d'ailleurs inverser, un aide mesurait simultanément la différence de potentiel entre la cathode et l'anode, en déplaçant le plateau supérieur, jusqu'à ce que le plateau mobile vint se placer en équilibre dans le plan de l'anneau de garde, l'anode et

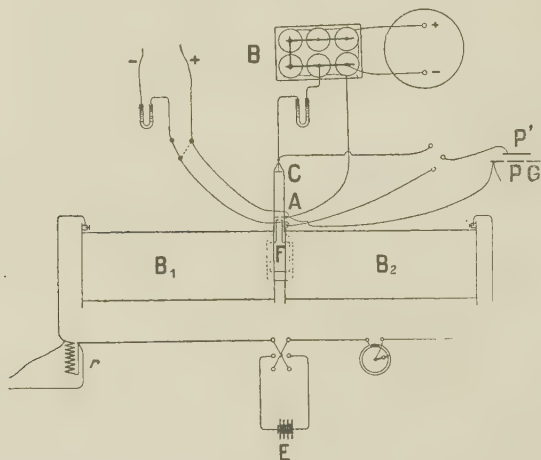


Fig. 5.

le cylindre étant réunis. On mesurait ensuite l'intensité du courant au moyen du potentiomètre par la méthode déjà décrite. Puis, par le jeu du commutateur, on interposait la différence de potentiel de la batterie d'accumulateurs.

La différence de potentiel entre la cathode et l'anode baissait. Pour qu'elle reprît la valeur qu'elle avait auparavant, on reliait le tube à la machine à vide, qui était dans le cas présent la pompe Gøede. Il suffisait alors de regarder avec soin le microscope de l'électromètre. Au bout d'un certain temps, le tube durcissant, le plateau était attiré et l'index se déplaçait dans le champ du microscope.

Pendant ce temps, on maintenait constante la déviation de la tache produite par le champ magnétique en faisant varier l'intensité du courant au moyen d'un rhéostat, et, au moment précis où l'aide prévenait que les deux croix étaient superposées, on arrêtait le réglage du courant. Au moyen du commutateur, on mettait alors le cylindre en relation avec le plateau de l'électromètre et l'on mesurait la différence de potentiel V' . On mesurait en même temps l'intensité i' .

Grâce à ces précautions, j'ai pu vérifier l'exactitude de la relation

$$\frac{V'}{V} = 1 - \frac{i'^2}{i^2}.$$

La pompe Gæde se prêtait très bien à ces opérations, car, suivant qu'on la fait tourner dans un sens ou dans l'autre, on peut faire le vide ou faire rentrer de l'air.

Les résultats obtenus sont les suivants. Les différences de potentiel sont exprimées en volts et les intensités en ampères.

Désignons la déviation simple par δ :

$$\delta = 1,8.$$

Différence de potentiel

entre cathode et anode V.		entre anode et cylindre V' .	$\frac{V - V'}{V}$.	Intensités du courant.		$\frac{i'^2}{i^2}$.
				i .	i' .	
9 844	4602		0,532	1,903	1,387	0,531
11 707	4596		0,607	2,083	1,627	0,610
13 293	4584		0,655	2,228	1,783	0,640
17 493	4517		0,742	2,568	2,199	0,733
17 136	4516		0,736	2,532	2,169	0,734
17 360	4502		0,741	2,554	2,200	0,742
13 122	4501		0,657	2,210	1,789	0,655
14 230	4482		0,685	2,301	1,894	0,677
17 943	4474		0,751	2,600	2,241	0,743
15 841	4462		0,718	2,428	2,050	0,713
Moyenne.....			0,682	Moyenne.....		0,678

$\delta = 1,2.$

9 943	3760	0,622	1,278	1,004	0,617
11 827	3761	0,682	1,404	1,164	0,687
14 566	3729	0,744	1,545	1,350	0,763
15 848	3728	0,765	1,622	1,419	0,765
13 912	3707	0,733	1,525	1,302	0,729
15 826	3682	0,767	1,622	1,440	0,788
14 799	3659	0,753	1,583	1,371	0,750
13 105	3655	0,721	1,474	1,256	0,726
16 578	3658	0,779	1,650	1,465	0,788
15 849	3617	0,772	1,632	1,433	0,771
Moyenne.....		0,754	Moyenne.....		0,738

 $\delta = 1,2.$

17 664	3728	0,789	1,725	1,539	0,796
17 655	3715	0,790	1,735	1,545	0,792
17 556	3716	0,788	1,729	1,524	0,777
17 447	4541	0,740	1,719	1,484	0,745
16 673	4488	0,731	1,685	1,446	0,736
17 364	4455	0,743	1,718	1,490	0,752
13 885	4463	0,679	1,540	1,264	0,673
10 511	4644	0,558	1,437	1,081	0,566
17 060	4576	0,732	1,836	1,572	0,733
17 756	4543	0,744	1,879	1,629	0,752
Moyenne.....		0,729	Moyenne.....		0,732

 $\delta = 1.$

9 442	2807	0,703	1,052	0,875	0,692
10 665	2742	0,743	1,131	0,954	0,711
9 977	2733	0,726	1,080	0,919	0,724
12 231	2726	0,777	1,210	1,054	0,759
12 893	2715	0,789	1,234	1,093	0,785
15 412	2698	0,825	1,355	1,222	0,813
11 769	2692	0,771	1,177	1,037	0,776
14 820	2687	0,819	1,321	1,193	0,816
14 550	2687	0,815	1,313	1,181	0,809
14 224	2684	0,811	1,308	1,163	0,791
Moyenne.....		0,778	Moyenne.....		0,768

Moyenne des quatre séries de mesures :

$$\frac{V - V'}{V} = 0,731; \quad \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}^2} = 0,729.$$

Cette concordance, très bonne entre ces deux valeurs, montre donc bien que l'équation de Kaufmann-Simon est applicable.

Il est utile de dire quelques mots de l'aspect du tube. Quand l'anode et le cylindre étaient réunis, l'ombre du fil sur le fond du tube se présentait sous forme d'une ligne sombre très nette.

Quand l'anode et le cylindre présentaient une différence de potentiel, la ligne sombre se transformait en une bande d'autant plus large que cette différence de potentiel se rapprochait plus de celle qui existe entre la cathode et l'anode.

Autrement dit, les deux taches lumineuses demi-circulaires produites par les rayons cathodiques s'écartent de plus en plus de la position médiane au fur et à mesure que, pour une même différence de potentiel V , la différence de potentiel V' se rapproche de V . L'écart des deux taches semble déterminé par le rapport $\frac{V-V'}{V}$.

De plus, les deux taches, qui sont hémisphériques quand $\frac{V-V'}{V}$ est voisin de 1, prennent la forme d'un ménisque de plus en plus étroit, présentant en son milieu une ligne sombre également incurvée, quand $\frac{V-V'}{V}$ diminue.

Au contraire, quand on augmente la vitesse des rayons cathodiques, en interposant entre l'anode et le cylindre une différence de potentiel dans le même sens qu'entre la cathode et l'anode, les deux faisceaux empiètent l'un sur l'autre au lieu de s'éloigner, comme dans le cas précédent ⁽¹⁾.

(¹) M. J. Perrin avait déjà constaté le même fait en portant un fil, situé derrière une anode et dont l'ombre venait se former sur le fond du tube, à un potentiel supérieur ou inférieur à cette anode.

Dans le premier cas, les deux faisceaux se rapprochent et empiètent l'un sur l'autre. Dans le second cas, ils s'éloignent.

Pour faire une mesure, quand l'anode et le cylindre présentaient une différence de potentiel, il importait d'amener le bord d'une des taches lumineuses au centre de la plaque.

En effet, pour augmenter la précision, je doublais la déviation en inversant le courant dans les bobines. Il fallait donc, pour que les deux déviations fussent égales, que le bord de la tache fût au centre. Sinon, elles eussent été inégales, en premier lieu parce que la direction du faisceau non dévié n'était pas perpendiculaire à la plaque, et en second lieu parce que le champ magnétique n'aurait pas été symétrique pour les deux positions du faisceau.

Pour redresser le faisceau, je me servais d'un petit aimant auxiliaire placé près de la cathode. De cette façon, à l'intérieur du cylindre de Faraday, le faisceau utilisé avait la direction de l'axe et était rectiligne, l'aimant directeur étant suffisamment éloigné.

Il importe de remarquer que la différence de potentiel retranchée entre la cathode et l'anode, produite par la batterie d'accumulateurs, restait absolument invariable, que le tube fonctionnât ou qu'il ne fonctionnât pas, et quelle que fût la différence de potentiel entre la cathode et l'anode, c'est-à-dire quelle que fût la dureté du tube⁽¹⁾. Cette circonstance était particulièrement favorable pour les expériences que j'avais en vue, car, entre le temps où se faisait la mesure de V et celle de V' , il importait peu que le vide du tube changeât, puisque V' ne changeait pas.

Il n'en serait pas de même si l'on adoptait la disposition que j'avais prise dans mes premières mesures.

(1) Toutefois, quand le tube devient extrêmement mou, et qu'il présente l'aspect du tube de Geissler, cette différence de potentiel baisse légèrement; de même, quand le tube devient extrêmement dur, cette différence devient légèrement plus forte qu'à l'état normal. Mais nous n'étions jamais dans ces conditions extrêmes pendant nos expériences.

En effet, dans ce cas la différence de potentiel V' prise entre deux points de la batterie en cascade varie quand la différence de potentiel entre les deux extrémités de la cascade varie.

Mesures faites avec la différence de potentiel ajoutée.

— On peut également se proposer de vérifier l'équation de Simon en établissant une différence de potentiel entre l'anode et le cylindre, de sens tel qu'elle produise une augmentation de la vitesse des rayons cathodiques.

On a alors la relation

$$\frac{V + V'}{V} = \frac{v'^2}{v^2} = \frac{i'^2}{i^2}.$$

J'avais d'abord essayé de vérifier cette relation sur un premier tube où la distance entre l'anode et le cylindre était de 2^{cm}.

Dans ces conditions, je n'avais pu obtenir de différence de potentiel mesurable entre l'anode et le cylindre. Il se produisait en effet une décharge continue entre l'anode et le cylindre. On voyait sortir de l'anode percée, qui était cathode vis-à-vis du cylindre, un rayon-canal très net, se dirigeant vers la cathode principale. Dans ce cas, la décharge principale était très perturbée, et il ne se formait aucune tache nette sur le fond du cylindre.

N'ayant pu obtenir ainsi, même avec des vides très élevés, une différence de potentiel mesurable entre l'anode et le cylindre, j'ai fait construire un autre tube, dans lequel je pouvais rapprocher beaucoup plus le cylindre de l'anode.

La distance à laquelle j'ai opéré était de 0^{cm}, 81. On peut alors, si l'on relie l'anode et le cylindre aux deux pôles de la batterie à haut voltage dans le sens indiqué, obtenir une différence de potentiel notable entre ces deux parties.

Il faut remarquer toutefois que, comme dans les expériences précédentes, où le cylindre était à un potentiel moins élevé que l'anode, la différence de potentiel entre la cathode et l'anode est plus faible quand l'anode et le cylindre ne sont pas au même potentiel que quand ils sont réunis.

Il faut donc, dans ce cas également, modifier la dureté du tube, de façon que la différence de potentiel, entre la cathode et l'anode, reste invariable dans les deux mesures successives.

Les appareils de mesure étaient exactement les mêmes que dans les expériences précédentes, et les mesures étaient conduites de la même façon. Comme source de différence de potentiel, je me servais de la même batterie d'accumulateurs.

Il importe de remarquer que la différence de potentiel de la batterie, au lieu de rester constante, comme dans le cas où elle était disposée de façon à diminuer la vitesse des corpuscules, baissait, quand on l'établissait, de façon à produire une accélération des rayons cathodiques. Elle baissait d'autant plus que le tube était plus mou.

Les nombres qui suivent montrent cette dernière influence. A côté des nombres, qui représentent la différence de potentiel entre la cathode et l'anode, on a mis ceux qui représentent la différence de potentiel V' entre l'anode et le cylindre.

La batterie en circuit ouvert présentait une différence de potentiel entre ses bornes de 2784 volts :

V.	V'.
19 599	2528
17 205	2508
15 300	2485
13 656	2472
11 478	2459

Par conséquent, si la dureté du tube change, la différence de potentiel V' changera.

Avec cette distance de $0^{\text{cm}},8$ entre l'anode et le cylindre, on ne peut pas employer pour V' des voltages supérieurs à 2600 ou 2700 volts, car, quand on dépasse ces limites, il éclate des décharges disruptives à l'intérieur du tube.

Les limites de voltage entre lesquelles on peut opérer sont ainsi beaucoup plus restreintes que dans les expériences précédentes. Les erreurs relatives devant être plus fortes, on doit s'attendre à une précision moins grande.

La tache présentait, il est vrai, un éclat plus grand, quand on augmentait la vitesse des rayons cathodiques; mais l'ombre du fil était très difficilement visible, à cause du croisement des faisceaux; d'où une nouvelle cause d'incertitude.

Le Tableau suivant, qui donne les résultats expérimentaux, présente quatre colonnes. La première donne la différence de potentiel V entre la cathode et l'anode; la seconde, la différence de potentiel V' entre l'anode et le cylindre; les deux dernières, les rapports $\frac{V + V'}{V}$ et $\frac{i'^2}{i^2}$ qui doivent être égaux :

V .	V' .	$\frac{V + V'}{V}$.	$\frac{i'^2}{i^2}$.
12 307	2503	1,203	1,252
12 693	2591	1,204	1,236
15 603	2641	1,169	1,190
14 459	2633	1,182	1,198
14 443	2617	1,181	1,184
13 195	2609	1,198	1,189
12 535	2655	1,212	1,214
15 447	2840	1,184	1,206
14 331	2818	1,197	1,216
15 360	2808	1,183	1,199
Moyennes.....		1,191	1,208

V.	V'.	$\frac{V + V'}{V}$	$\frac{\bar{v}^2}{\bar{v}^2}$
15 266	2622	1,172	1,179
14 221	2574	1,181	1,184
14 586	2549	1,177	1,172
12 012	2534	1,211	1,225
15 140	2549	1,168	1,201
13 787	2580	1,187	1,183
15 444	2641	1,171	1,192
11 127	2528	1,227	1,279
13 859	2525	1,182	1,222
12 538	2522	1,201	1,229
Moyennes.		1,188	1,207
14 258	2550	1,179	1,225
12 569	2545	1,202	1,223
15 341	2570	1,167	1,189
15 608	2542	1,163	1,183
15 485	2574	1,166	1,164
14 741	2554	1,173	1,133
14 117	2572	1,182	1,224
14 037	2571	1,183	1,216
15 074	2613	1,173	1,179
14 463	2600	1,180	1,192
Moyennes.		1,177	1,193
8 253	2376	1,288	1,331
14 346	2466	1,172	1,167
13 980	2479	1,177	1,204
13 856	2433	1,176	1,154
14 367	2246	1,156	1,164
12 580	2084	1,166	1,171
15 038	2088	1,139	1,161
14 356	2082	1,145	1,128
11 561	2074	1,179	1,143
14 869	2086	1,140	1,172
Moyennes.		1,174	1,179

Comme moyennes finales de ces 40 expériences, nous avons

$$\frac{V + V'}{V} = 1,182, \quad \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}^2} = 1,197.$$

Le premier nombre présente, par rapport au second, une différence de 1,2 pour 100. Cette différence est dans le sens conforme à l'hypothèse de J.-J. Thomson. Mais elle peut très bien s'expliquer par les erreurs d'expériences et est en tout cas très faible vis-à-vis de la différence qui existe entre les valeurs de $\frac{e}{m}$ données par J.-J. Thomson et celles données par Simon.

Ainsi, en résumé, ces deux séries de mesures prouvent, la première d'une façon très nette, la seconde d'une façon un peu moins nette, que les rayons cathodiques prennent bien naissance à la cathode même et que c'est à partir de la cathode qu'ils reçoivent l'énergie cinétique correspondante.

DEUXIÈME PARTIE.

Mesure de $\frac{e}{m}$. — Après avoir démontré que la relation de Schuster était exacte, il était intéressant de reprendre séparément la mesure de $\frac{e}{m}$ par la méthode de Simon et par celle de J.-J. Thomson.

Je me suis servi, pour reprendre les expériences de Simon, du tube que j'avais employé dans les mesures déjà décrites.

La formule, qui donne $\frac{e}{m}$, est celle qui a été trouvée par Simon, légèrement modifiée toutefois, pour répondre aux conditions un peu différentes, dans lesquelles le tube était placé.

Je serai donc obligé de reprendre le calcul qui permet d'établir cette formule. On peut d'ailleurs arriver à la formule définitive plus directement que ne l'avait fait Simon, en conduisant le calcul un peu différemment.

Le tube était placé entre les deux bobines, comme il a été précédemment indiqué.

La droite, qui joint le milieu de la cathode au centre de l'orifice de l'anode, se confond avec la trajectoire du faisceau cathodique non dévié. Elle est contenue dans le plan vertical situé à égale distance des deux joues voisines des bobines et dans le plan horizontal qui contient l'axe de ces mêmes bobines. Elle représente donc l'intersection de ces deux plans.

Les lignes de force du champ magnétique, produit par les bobines, sont horizontales et perpendiculaires à l'axe du tube. La courbe, que décrira le corpuscule sous l'influence du champ ainsi dirigé, sera donc contenue dans le plan vertical qui contient l'axe du tube.

La position de la particule dans ce plan sera déterminée par ses coordonnées rapportées à deux axes rectangulaires.

Nous choisirons, comme ligne des abscisses, l'axe du tube, c'est-à-dire la direction du faisceau non dévié, comme origine des coordonnées, le point qui coïncide avec le fil tendu à l'entrée du cylindre, comme ligne des ordonnées, une perpendiculaire à l'axe des x , élevée à l'origine.

Nous appellerons : l , la distance de l'entrée au fond du cylindre; c , sa distance à la cathode.

Ceci posé, partons de l'équation de déviation magnétique

$$(1) \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = H e \frac{dx}{dt}.$$

Multiplions par dt les deux membres et intégrons :

$$(2) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{e}{m} \int H \frac{dx}{dt} dt.$$

Sur la cathode $\frac{dz}{dt}$ est nul. Nous aurons la valeur de $\frac{dz}{dt}$ pour un point de la trajectoire d'abscisse x , si nous pouvons effectuer l'intégration entre deux limites de temps

t_1 et t_2 , t_1 et t_2 étant les valeurs que prend le temps quand la particule occupe sur la courbe les points d'abscisse $-c$ et x .

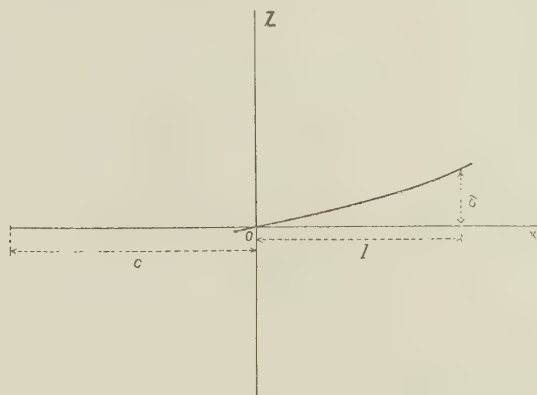


Fig. 6.

Mais, comme nous pouvons prendre indifféremment comme variable indépendante soit x , soit t , et qu'il est plus commode de prendre x , c'est par rapport à cette variable que nous effectuerons l'intégration, entre les limites $-c$ et x :

$$(3) \quad \left(\frac{dz}{dt} \right)_x = \frac{e}{m} \int_{-c}^x H \, dx.$$

Or, on a identiquement

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

En remplaçant $\frac{dz}{dt}$ par cette expression dans l'équation (3) il vient

$$(4) \quad \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} \int_{-c}^x H \, dx.$$

Si v est la vitesse de la particule en un point de sa tra-

jectoire d'abscisse x ,

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

d'où l'on tire

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Portons cette valeur de $\frac{dx}{dt}$ dans l'équation (4), ce qui donne

$$(6) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \frac{e}{m} \int_{-c}^x H \, dx;$$

$\frac{dz}{dt}$ est toujours petit vis-à-vis de v . Si l'on veut une valeur approchée de $\frac{dz}{dx}$, il suffira donc de négliger $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ vis-à-vis de v^2 , et l'on aura

$$(7) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{e}{mv} \int_{-c}^x H \, dx.$$

Mais, dans un calcul exact, cette approximation n'est plus permise. En revanche, on pourra développer le radical et ne conserver que les deux premiers termes du développement en série :

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^3} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{v} \left[1 + \frac{1}{2v^2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right].$$

Remplaçons $\frac{dz}{dt}$ par sa valeur tirée de l'équation (3). Il vient

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = \frac{1}{v} \left[1 + \frac{e^2}{2m^2v^2} \left(\int_{-c}^x H \, dx \right)^2 \right].$$

$\frac{dz}{dx}$ prend la valeur suivante :

$$(10) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{e}{mv} \left[\int_{-c}^x H dx + \frac{e^2}{2m^2 v^2} \left(\int_{-c}^x H dx \right)^3 \right].$$

Il importe de remarquer que, entre la cathode et le cylindre, la vitesse v est variable et est fonction de x . Au contraire, à l'intérieur du cylindre de Faraday, v devient une constante

Si donc nous effectuons une nouvelle intégration entre 0 et x , nous devons considérer v comme indépendant de x . z étant nul pour $x = 0$, on aura, en intégrant,

$$(11) \quad z = \frac{e}{mv} \left[\int_0^x dx \int_{-c}^x H dx + \frac{e^2}{2m^2 v^2} \int_0^x dx \left(\int_{-c}^x H dx \right)^3 \right].$$

Nous aurons la valeur de la déviation lue sur le fond du cylindre en donnant à x la valeur l . Appelons δ cette déviation :

$$(12) \quad \delta = \frac{e}{mv} \left[\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx + \frac{e^2}{2m^2 v^2} \int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H dx \right)^3 \right].$$

Le second terme de la parenthèse est petit vis-à-vis du premier. Nous pouvons donc remplacer le terme en $\frac{e}{mv}$ par une valeur approchée tirée par intégration de l'équation (7)

$$(13) \quad \delta = \frac{e}{mv} \int_0^l dx \int_{-c}^x H dx.$$

Tirons $\frac{e}{mv}$ de cette équation et portons cette valeur dans la relation (12).

Il vient

$$(14) \quad \delta = \frac{e}{mv} \left\{ \int_0^l dx \int_{-c}^x H dx + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H dx \right)^2}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right)^2} \right\}.$$

M.

En appliquant la relation de Schuster, on a

$$\frac{e}{mv} = \frac{v}{2V}.$$

Portons cette valeur de $\frac{e}{mv}$ dans l'expression (14) et tirons-en v .

Il vient

$$v = \frac{2V\delta}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H dx \right)^3}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right)^3} \right\}}.$$

Connaissant v , nous avons $\frac{e}{m}$ par l'expression

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V} = \frac{2V\delta^2}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H dx \right)^3}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right)^3} \right\}^2}.$$

Le second facteur du produit, qui se trouve au dénominateur de cette expression, est composé de deux termes, dont le second est petit vis-à-vis de l'unité. En le développant en série, on arrive à l'expression

$$\frac{e}{m} = \frac{2V\delta^2}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right)^2} \left\{ 1 - \delta^2 \frac{\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H dx \right)^3}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H dx \right)^3} \right\}.$$

Voyons maintenant comment nous mesurerons les différentes grandeurs qui entrent dans la formule.

Mesure de δ . — δ est la déviation lue sur la plaque de verre d'urane divisée, qui se trouve dans le fond du tube à la distance l de l'entrée.

Pour connaître δ avec précision, il m'a paru préférable de maintenir, pour une même série de mesures, la déviation δ invariable, en modifiant au moyen d'un rhéostat l'intensité du courant.

En effet, si au contraire on laissait le courant constant et qu'on mesurât à chaque détermination la déviation δ , il faudrait, pour avoir dans les résultats une précision suffisante, apprécier le dixième de millimètre.

Il est certainement plus facile d'obtenir une coïncidence de l'ombre du fil avec un trait de l'échelle, à un dixième de millimètre près, que d'évaluer avec cette approximation une fraction de division.

On maintenait donc constante pour une même série de mesures la déviation δ , et c'était l'intensité du courant variable d'une expérience à l'autre qu'on mesurait.

Mesure de i . — N'ayant pas d'ampèremètre suffisamment précis à ma disposition, je me servais, pour mesurer l'intensité du courant, du dispositif employé pour les mesures déjà décrites.

Je rappellerai que ce dispositif consistait à mesurer au potentiomètre la différence de potentiel ohmique produite aux extrémités d'une résistance connue par le courant à évaluer.

Mesure du champ magnétique. — H représente le champ magnétique le long de la trajectoire. C'est une fonction des variables x et z qui déterminent la position de la particule sur la trajectoire. Mais il est facile de voir que ce champ H peut être remplacé par le champ H' , sur l'axe des x , correspondant à la même abscisse.

En effet, le champ produit par les bobines en un point de coordonnées x, z , n'est très différent du champ au point $x, 0$, que près des bords des bobines, c'est-à-dire dans les régions où, le champ étant très faible, la déviation magnétique et par suite z sont très petits. Près du centre,

au contraire, où la déviation est notable, le champ est sensiblement le même pour ces deux points de même abscisse.

Il suffit alors de remplacer le champ H le long de la trajectoire par le champ H' le long de l'axe des x . Appelons H_1 le rapport du champ magnétique H' en un point d'abscisse x au champ maximum H_m au centre.

$$H_1 = \frac{H'}{H_m};$$

H_m est de la forme

$$H_m = Bi,$$

i étant l'intensité du courant et B une constante.

Si nous remplaçons, dans l'expression de $\frac{e}{m}$, H par H' et H' par sa valeur en fonction de H_1 et de H_m , il vient

$$\frac{e}{m} = \frac{2\delta^2 V}{B^2 i^2 \left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx \right)^2} \left\{ 1 - \delta^2 \frac{\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H_1 dx \right)^3}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx \right)^3} \right\}.$$

Nous aurons donc à déterminer :

1° La répartition du champ magnétique le long de l'axe, le champ au centre étant pris égal à 1, c'est-à-dire la répartition du champ H_1 ;

2° La valeur du champ maximum au centre, quand un courant égal à l'unité circule dans les bobines, c'est-à-dire la constante B .

Répartition du champ magnétique. — Pour déterminer cette répartition, on se servait d'un magnétomètre disposé de la façon suivante (*fig. 7*) :

Un petit aimant A , de 3^{mm} de longueur, était fixé à l'extrémité inférieure d'une tige d'aluminium perpendiculairement à celle-ci. L'extrémité supérieure portait un

petit miroir M. Son plan était perpendiculaire à l'axe du petit aimant.

La distance entre le miroir et l'aimant était telle que,

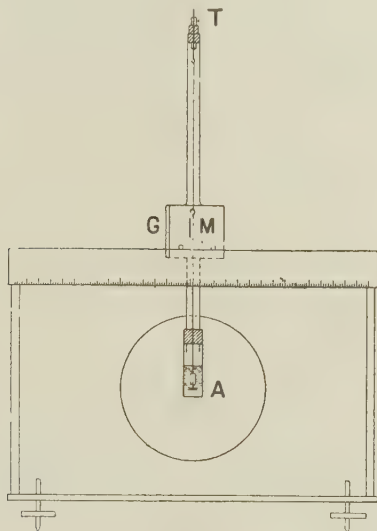


Fig. 7.

quand l'aimant était situé sur l'axe des x (trajectoire du faisceau non dévié), le miroir se trouvait au-dessus des bobines.

La tige d'aluminium était à l'intérieur d'un appareil clos, pour la préserver des courants d'air. Cet appareil était lui-même composé d'une boîte en bois, munie à sa face supérieure d'un tube de verre et à sa face inférieure d'un autre tube fermé dans le bas et dans le prolongement du premier.

Le tube de verre supérieur était fermé par un bouchon que traversait un petit tube de laiton. Dans ce dernier glissait une tige, à l'extrémité inférieure de laquelle était fixé le fil de cocon, qui supportait le système mobile de l'aimant et du miroir.

La face antérieure de la boîte en bois était constituée par une glace G, afin de pouvoir observer par la méthode de Poggenдорff les déviations du miroir.

L'extrémité inférieure du système oscillant était lestée par un poids en laiton et plongeait dans un mélange d'huile de vaseline et de pétrole, afin d'amortir rapidement les oscillations.

Chaque paroi latérale était munie de deux crochets, permettant au système de reposer sur deux réglettes horizontales en bois, dont l'une portait une division millimétrique.

Un index fixé à la boîte, et se déplaçant devant la graduation, permettait de repérer la position de la boîte, et par conséquent celle de l'aimant.

Afin que le petit aimant conservât une direction invariable pendant les déplacements du système en l'absence de courant magnétisant, on fixait à la boîte en bois un aimant assez puissant, pour que le champ produit par ce dernier fût grand vis-à-vis du champ terrestre, variable d'un point à l'autre dans un laboratoire.

On dirigeait alors le petit aimant dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe des bobines et sur la ligne que devait parcourir le faisceau non dévié.

Si l'appareil est bien réglé, quand on fera glisser tout le système sur les barres qui servent de support, le petit aimant doit suivre la trajectoire horizontale du faisceau non dévié.

La position de l'aimant étant repérée avec soin, par rapport au centre des bobines, on faisait passer un courant très faible dans les bobines. L'aimant était dévié d'un angle α tel que

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{H}{h},$$

H étant le champ produit par les bobines; h , le champ auxiliaire.

On faisait avancer de 5^{mm} en 5^{mm} le petit aimant et l'on notait, à chaque position, au moyen de la méthode de Poggendorf, l'angle dont avait tourné le miroir.

Quand le miroir tournera d'un angle α , le rayon tournera de 2α . Les déviations, observées par la méthode de Poggendorf, sont proportionnelles à $\tan 2\alpha$.

Si δ est la déviation lue, D la distance de l'échelle au miroir, on a

$$\tan 2\alpha = \frac{\delta}{D}.$$

Avec une approximation suffisante, $\tan \alpha$ est donnée par

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{\delta}{D} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{D^2} \right).$$

Le terme correctif est petit mais n'est pas absolument négligeable pour les grandes déviations.

D'autre part, comme on approchait le magnétomètre de la lunette, la distance D diminuait, ce qui nécessitait une nouvelle correction pour ramener les déviations à ce qu'elles seraient si la distance D était constante.

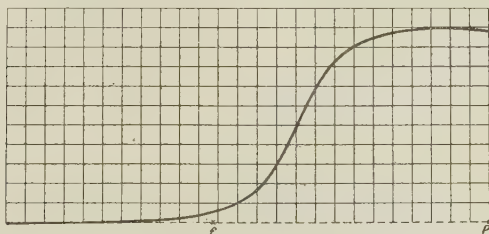


Fig. 8.

Dans le Tableau suivant, qui représente la moyenne de dix séries de mesures, nous donnerons dans la première colonne la distance de l'aimant du magnétomètre au centre; dans la seconde, les déviations observées et dans

la troisième, le rapport des déviations observées à la déviation maximum au centre :

23	—0,005	9,5	5,75	0,248
22,5	—0,004	9	7,59	0,288
22	—0,004	8,5	10,01	0,379
21,5	—0,003	8	12,78	0,485
21	—0,003	7,5	15,49	0,587
20,5	—0,002	7	18,03	0,684
20	—0,001	6,5	20,15	0,764
19,5	—0,001	6	21,80	0,827
19	—0,000	5,5	22,85	0,867
18,5	+0,001	5	23,69	0,899
18	+0,002	4,5	24,40	0,926
17,5	+0,004	4	25,01	0,949
17	+0,005	3,5	25,39	0,963
16,5	+0,007	3	25,69	0,974
16	+0,010	2,5	25,91	0,983
15,5	+0,013	2	26,07	0,989
15	+0,016	1,5	26,25	0,996
14,5	+0,020	1	26,30	0,998
14	+0,025	0,5	26,35	1,000
13,5	+0,031	0	26,35	1,000
13	1,03 +0,039	— 0,5	26,30	0,995
12,5	1,28 +0,049	— 1	26,24	0,990
12	1,65 +0,062	— 1,5	26,10	0,985
11,5	2,10 +0,079	— 2	25,98	0,979
11	2,61 +0,099			
10,5	3,35 +0,127			
10	4,35 +0,165			

On peut alors, au moyen de ces données, tracer la courbe du champ magnétique.

La courbe ainsi obtenue est très régulière, mais n'est pas rigoureusement symétrique par rapport au centre. Cela tient probablement à ce que, malgré les précautions prises, les axes des bobines n'étaient pas rigoureusement dans le prolongement l'un de l'autre.

Cela n'a d'ailleurs aucune importance pour le résultat,

puisqu'il suffit seulement de connaître la répartition du champ magnétique.

Détermination des intégrales

$$\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx \quad \text{et} \quad \int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H_1 dx \right)^3.$$

Ces intégrales s'obtiennent facilement en se fondant sur les résultats précédents.

Pour évaluer numériquement l'intégrale

$$\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx,$$

on remarquera que

$$\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx = \int_0^l dx \left(\int_{-c}^0 H_1 dx + \int_0^x H_1 dx \right).$$

Or

$$\int_0^l dx \int_{-c}^0 H_1 dx = \int_{-c}^0 H_1 dx \int_0^l dx = l \int_{-c}^0 H_1 dx.$$

Il suffit donc, pour avoir cette première partie de l'intégrale, d'évaluer l'intégrale du champ magnétique entre la cathode et le cylindre et de multiplier cette dernière par l .

Pour avoir la seconde partie de l'intégrale double, on calculera de 5^{mm} en 5^{mm} la valeur de $\int_0^x H_1 dx$.

On obtiendra une nouvelle courbe en portant en ordonnées les valeurs de $\int_0^x H_1 dx$ correspondantes aux abscisses x .

L'aire de cette nouvelle courbe donne l'intégrale double cherchée. On opérera de même pour obtenir

$$\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H_1 dx \right)^3.$$

On a obtenu ainsi :

$$\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx = 53,62,$$

$$\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H_1 dx \right)^3 = 2601.$$

Détermination du champ au centre en valeur absolue. — Pour déterminer le champ au centre, on pourrait se servir de la formule

$$H = 4 \pi n \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right) i;$$

r étant le rayon;

b , la distance du plan vertical médian aux faces extérieures des bobines;

a , la distance du plan vertical médian aux faces intérieures des bobines;

n , le nombre de spires par unité de longueur.

Mais l'enroulement sur les bobines n'était pas suffisamment régulier pour qu'on pût compter avec certitude sur la détermination des constantes.

Toutefois, les nombres que j'ai trouvés par ce calcul sont très voisins de ceux qui ont été obtenus par la méthode suivante.

Le principe de la méthode consistait à opposer, à la déviation produite par le champ des bobines, la déviation obtenue par le champ de deux spires verticales disposées symétriquement par rapport au plan médian.

On a ainsi les avantages d'une méthode de zéro. Il était préférable d'employer deux spires au lieu d'une seule, parce que, avec deux spires, le champ au milieu présente un maximum et que, par conséquent, si l'aimant du magnétomètre n'est pas rigoureusement au centre, le champ produit par les spires est encore très sensiblement

le même qu'au milieu. Or, il est difficile de connaître la distance exacte du plan de la spire au petit aimant.

Le champ, au milieu des deux spires, est donné par la formule

$$H = 4\pi \frac{r^2}{\left(r^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} i = Si;$$

d étant la distance du plan des deux spires; r , leur rayon.

Chaque spire était enroulée sur un anneau en bois très épais, dont le diamètre intérieur était un peu supérieur au diamètre extérieur des bobines (*fig. 9*). Sur cet anneau

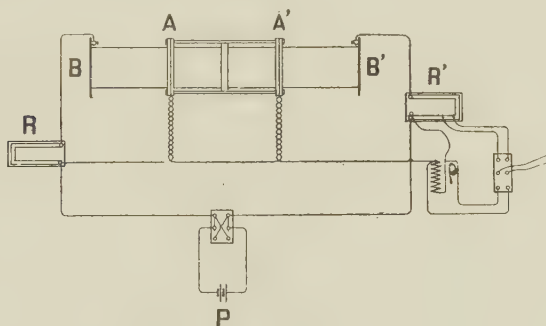


Fig. 9.

avait été tracée au tour une rainure de façon que le fil vînt s'y appliquer.

Les deux anneaux A et A' étaient réunis l'un à l'autre par trois tiges de laiton de même longueur.

A une même distance de leurs extrémités était vissé un galet de façon que les tiges pénétrassent dans les anneaux et fussent arrêtées par ces galets.

Un écrou permettait de fixer l'anneau contre le galet.

Les anneaux étant ainsi maintenus par trois tiges rigides d'égale longueur, les deux spires avaient même axe et leurs plans étaient parallèles.

Il fallait aussi qu'elles fussent coaxiales aux bobines. Pour obtenir ce résultat, on interposait entre l'anneau et la bobine deux demi-anneaux dont le diamètre intérieur était égal au diamètre extérieur de la bobine et le diamètre extérieur égal au diamètre intérieur de l'anneau portant la spire. De cette façon, on était assuré que la coaxialité était réalisée.

Ceci posé, on commençait par mettre aussi exactement que possible les deux spires à égale distance du plan médian, dans lequel devait se trouver le petit aimant du magnétomètre.

Le courant, fourni par deux accumulateurs, était dérivé, d'une part, dans un circuit comprenant les bobines B et B', une résistance connue R et une boîte de résistance R', et, d'autre part, dans un autre circuit comprenant les spires et une résistance également connue ρ .

Le courant pouvait être inversé dans les deux circuits. Quand les deux champs étaient inégaux, on avait une déviation soit dans un sens, soit dans l'autre, suivant le sens du courant. Mais, en réglant convenablement la résistance du circuit comprenant les bobines, il arrivait un moment où on n'avait aucune déviation.

Appelons B la constante des bobines S celle des spires.

Nous avons alors, si i est le courant qui circule dans les bobines et i' celui qui circule dans les spires,

$$Bi = Si';$$

d'où

$$B = S \frac{i'}{i}.$$

Pour obtenir ce rapport $\frac{i'}{i}$, on mesurait la différence de potentiel ρi aux extrémités de la résistance ρ et la différence de potentiel $\rho' i'$ aux extrémités de la résistance ρ' , au moyen du potentiomètre, en se servant de l'électromètre capillaire comme instrument de zéro.

Si R est la résistance trouvée au potentiomètre pour le premier courant i , et R' pour le second courant i' , on a, I étant l'intensité dans le potentiomètre,

$$\begin{aligned} RI &= \rho i, \\ R'I &= \rho' i'; \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{i'}{i} = \frac{R'}{R} \frac{\rho}{\rho'}.$$

Par suite,

$$B = S \frac{R'}{R} \frac{\rho}{\rho'}.$$

Les valeurs des résistances étaient, pour ρ , 100^{ω} et, pour ρ' , $0^{\omega}, 4073$.

Le diamètre des spires était de $23^{\text{cm}}, 47$; leur distance était de $42^{\text{cm}}, 85$; ce qui donne, pour la valeur S ,

$$S = 0,11868.$$

Les valeurs de R et R' mesurées sont :

R.	R'.	B.
6812	3482	56,96
6787	3482	56,75
2304	1180	56,85
2314	1187	56,76
4547	2329	56,84
4539	2324	56,87
6780	3472	56,86
Moyenne.....		56,84

Comme le montrent les résultats obtenus, la précision est très satisfaisante. Les nombres extrêmes ne s'écartent pas de la moyenne de plus de $\frac{4}{500}$.

Nous adopterons, pour la constante B , la valeur $56,84$.

Mesure des positions respectives des différentes parties du tube. — Les distances des électrodes les unes par rapport aux autres, ainsi que par rapport aux bobines, ont été déterminées au moyen de la machine à diviser, sur le chariot de laquelle était montée une lunette de cathéto-mètre.

La distance de l'entrée du cylindre au fond était de $14^{\text{cm}},44$; la distance du cylindre à l'anode de $0^{\text{cm}},81$ et celle de l'anode à la cathode de 12^{cm} .

L'origine des abscisses correspond au trou d'entrée du cylindre sur lequel est tendu le fil.

La plaque sur laquelle sont observées les déviations est à $14^{\text{cm}},44$ de l'origine.

La distance de l'origine à la cathode est de $12^{\text{cm}},81$. Par rapport au centre, les distances des diverses parties étaient les suivantes :

Le fond du cylindre était à $2^{\text{cm}},07$ à droite du milieu et son entrée à $12^{\text{cm}},37$ à gauche du milieu.

Enfin la cathode était à $25^{\text{cm}},18$ de ce même point.

Nous donnons maintenant les résultats.

Dans la première colonne nous inscrirons les différences de potentiel exprimées en volts, dans la seconde l'intensité du courant et dans la troisième, le produit $\frac{V\delta^2}{i^2}$, qui doit être constant :

$\delta = 1,4.$			$\delta = 1,4.$		
V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$	V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$
19 059	2,105	8431	18 322	2,061	8453
19 698	2,140	8431	15 132	1,860	8573
18 553	2,092	8309	17 702	1,989	8771
15 879	1,928	8373	19 322	2,124	8395
18 707	2,090	8394	17 902	2,018	8616
18 879	2,086	8504	18 173	2,046	8509
16 827	1,959	8594	18 481	2,066	8487
17 058	1,971	8606	18 973	2,089	8522
15 963	1,934	8365	18 482	2,069	8463
16 080	1,941	8366	16 758	1,959	8559
18 958	2,114	8315	17 336	2,028	8262
18 675	2,114	8191	19 486	2,157	8209
16 470	1,975	8276	19 761	2,156	8333
16 655	1,990	8249	17 446	2,024	8347
15 958	1,939	8319	17 515	2,033	8306
16 709	1,960	8525	19 391	2,123	8433
18 507	2,091	8296	19 569	2,149	8305
18 270	2,080	8277	18 572	2,098	8262
15 930	1,924	8434	19 158	2,121	8347
18 343	2,053	8530	17 391	2,018	8370

Les moyennes de la quantité $\frac{V\delta^2}{i^2}$ pour ces quatre groupes de dix mesures correspondant à $\delta = 1,4$ sont

8437
8535
8341
8317

La moyenne de ces quatre valeurs, c'est-à-dire des 40 mesures, est 8407.

$\delta = 1,3.$

$\delta = 1,3.$

V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$	V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$
14599	1,728	8257	18545	1,944	8293
17144	1,867	8312	18591	1,944	8313
17989	1,903	8395	18063	1,920	8281
18056	1,931	8183	18858	1,941	8459
17748	1,926	8086	19316	1,991	8235
16948	1,853	8341	19128	1,990	8163
17132	1,880	8192	18681	1,973	8110
17983	1,925	8201	18354	1,937	8267
18378	1,957	8110	17609	1,897	8270
17896	1,903	8351	17197	1,844	8547
10847	1,469	8495	16562	1,819	8459
12261	1,585	8248	14816	1,740	8270
13019	1,630	8281	14096	1,678	8461
14270	1,704	8305	13929	1,684	8301
14878	1,736	8343	15347	1,775	8232
17308	1,882	8259	14637	1,734	8227
17337	1,897	8142	15453	1,787	8178
16948	1,877	8130	15262	1,771	8214
18156	1,927	8263	15557	1,778	8317
17716	1,923	8096	16545	1,800	8630

Les moyennes respectives des quatre groupes précédents de dix mesures sont, pour $\frac{V\delta^2}{i^2}$,

8243
8294
8256
8329

La moyenne totale de ces 40 mesures est donc de

8280

$\delta = 1, 2.$			$\delta = 1, 2.$		
V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$	V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$
14 511	1,590	8265	19 154	1,809	8428
15 926	1,640	8527	18 921	1,803	8381
17 938	1,775	8202	18 164	1,752	8512
17 099	1,732	8208	18 899	1,782	8570
16 402	1,677	8398	17 965	1,770	8258
16 074	1,666	8340	17 557	1,738	8370
15 579	1,628	8464	16 610	1,712	8161
14 650	1,571	8548	18 938	1,799	8426
14 491	1,568	8487	19 740	1,858	8234
15 130	1,625	8241	19 642	1,855	8220
18 871	1,799	8397	17 774	1,768	8188
19 404	1,844	8217	17 447	1,753	8176
19 139	1,829	8239	16 929	1,727	8174
19 038	1,833	8160	18 885	1,796	8431
18 850	1,837	8044	17 965	1,794	8038
18 429	1,787	8311	17 842	1,772	8183
17 737	1,772	8134	17 094	1,736	8168
16 819	1,721	8177	16 943	1,733	8124
16 254	1,671	8382	17 312	1,731	8320
17 482	1,759	8136	19 158	1,823	8301

Les moyennes de $\frac{V\delta^2}{i^2}$ pour chacun de ces groupes de dix mesures sont

8368

8356

8220

8210

La moyenne des 40 mesures est donc de 8288.

$\delta = 0,9.$ $\delta = 0,9.$

V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$	V.	i.	$\frac{V\delta^2}{i^2}$
15 036	1,189	8615	19 562	1,371	8430
15 728	1,239	8299	19 698	1,396	8187
17 046	1,271	8547	19 186	1,353	8489
18 735	1,355	8265	17 784	1,329	8156
19 223	1,355	8480	18 397	1,367	7974
19 036	1,346	8511	18 720	1,362	8174
18 108	1,307	8586	19 298	1,377	8232
18 120	1,309	8566	18 073	1,324	8351
18 808	1,357	8273	18 541	1,352	8216
19 680	1,392	8227	18 848	1,356	8303
18 814	1,334	8563	15 510	1,210	8581
17 937	1,309	8477	16 936	1,298	8142
17 328	1,275	8621	15 906	1,236	8434
17 649	1,299	8472	17 554	1,308	8311
19 240	1,368	8327	16 314	1,274	8142
17 077	1,256	8768	16 485	1,280	8150
18 087	1,326	8333	16 147	1,265	8173
14 687	1,178	8573	15 708	1,247	8182
16 049	1,234	8537	15 125	1,213	8327
14 643	1,190	8375	14 821	1,191	8464

Les moyennes de $\frac{V\delta^2}{i^2}$ pour chacun des groupes de dix mesures sont

8437

8251

8505

8273

La moyenne totale est 8366.

Il ne reste plus qu'à calculer les valeurs de $\frac{e}{m}$ à partir de ces données.

Dans le Tableau suivant nous mettrons dans la première colonne les valeurs de δ , dans la seconde $\frac{V\delta^2}{i^2}$, dans la troisième les termes correctifs, dans la quatrième $\frac{e}{m}$:

M.

5

δ .	$\frac{V\delta^2}{l^2}$.	$1 - \delta^2 \frac{\int_0^l dx \left(\int_{-c}^x H_1 dx \right)^3}{\left(\int_0^l dx \int_{-c}^x H_1 dx \right)^3}$.	$\frac{e}{m}$.
1,4	8407	0,967	1,750.10 ⁷
1,3	8280	0,972	1,733.10 ⁷
1,2	8288	0,976	1,742.10 ⁷
0,9	8366	0,987	1,778.10 ⁷

La moyenne finale pour $\frac{e}{m}$ est 1,750.10⁷.

La vitesse moyenne v est 0,791.10¹⁰.

La valeur de $\frac{e}{m}$ ainsi obtenue est relative à la vitesse moyenne v .

Mais il faut ramener la valeur de $\frac{e}{m}$ ainsi obtenue à ce qu'elle serait, si la vitesse des particules était très faible.

On sait, en effet, que les remarquables théories d'Abraham avaient fait prévoir et que les belles expériences de Kaufmann ont démontré que la masse d'un corpuscule est une fonction de la vitesse, fonction qui tend vers l'infini quand cette vitesse tend vers celle de la lumière.

Les expériences de Kaufmann avaient été faites sur les rayon β du radium. Elles sont trop connues pour que nous y insistions. M. H. Starke ⁽¹⁾ a montré, sur les rayons cathodiques produits dans un tube à vide, la même variabilité de la masse électromagnétique avec la vitesse.

En opérant entre des limites extrêmes où la différence de potentiel entre la cathode et l'anode était de 8000 volts et de 38000 volts, il a trouvé que le quotient $\frac{e}{m}$ passait de la valeur 1,87 à la valeur 1,78. Dans ces expériences, il se servait des déviations électrique et magnétique combinées, mais déterminait les constantes expérimentales,

(1) H. STARKE, *Verhandlung der d. Physik. Gesellschaft*.

en portant dans ses formules la valeur de $\frac{e}{m}$ donnée par Simon, pour la vitesse à laquelle ce dernier opérait.

Quelle est cette fonction de la vitesse dont dépend la masse électromagnétique ?

Max Abraham, dans son remarquable travail sur la dynamique de l'électron, considère l'électron comme rigide et indéformable. Sa charge est ou superficielle ou uniforme en volume. Il trouva que la masse électromagnétique, quotient de la force par l'accélération, n'était pas la même dans la direction du mouvement ou dans la direction perpendiculaire, et fut conduit à deux masses, la masse longitudinale et la masse transversale, fonctions de la vitesse et devenant infinies quand la vitesse de la particule tend vers celle de la lumière.

Lorentz chercha à éviter les difficultés, qui se présentent dans l'optique des corps en mouvement, au moyen de nouvelles hypothèses. Il montra que, si l'on supposait que les dimensions de tous les corps ainsi que les molécules isolées subissent un changement de forme fonction de la vitesse, on pourrait expliquer le résultat négatif des expériences de Michelson et Morley.

Il suppose que toutes les actions intérieures au système sont d'origine électromagnétique, et que les corps subissent une contraction qui multiplie leurs dimensions parallèles à la vitesse par $\sqrt{1 - \beta^2}$, β étant le rapport de la vitesse d'entraînement à la vitesse de la lumière, les dimensions transversales restant invariables.

Einstein (1) a énoncé d'une façon générale le principe de la relativité, d'après lequel il est impossible, selon des expériences faites à l'intérieur d'un système animé d'un mouvement d'ensemble rectiligne, de s'apercevoir du mouvement de ce système. Cette théorie conduit à la même fonction que celle de Lorentz.

1) EINSTEIN, *Ann. der Physik*, t. XVII, 1905, p. 755.

Enfin Bücherer ⁽¹⁾ et Langevin ⁽²⁾ supposent que l'électron se déforme à volume constant. A la place du diamètre transversal invariable de l'électron de Lorentz, ils introduisent ainsi un diamètre dépendant de la vitesse, et tel que le volume de l'ellipsoïde soit égal au volume de la sphère originàire.

Les expériences de Kaufmann n'étaient pas suffisamment précises pour décider laquelle de ces trois théories rend le mieux compte de la courbe expérimentale.

Récemment ⁽³⁾, M. Bücherer a repris, sous une autre forme, les expériences de Kaufmann ; un grain de fluorure de radium était placé au centre d'un condensateur formé de deux plaques circulaires de 8^{cm} de diamètre et distants de 0^{mm}, 25 seulement.

Ce condensateur était enfermé dans une boîte cylindrique étanche de 16^{cm} de diamètre, sur la paroi latérale de laquelle se trouvait une pellicule photographique.

L'ensemble était placé dans un champ magnétique parallèle aux plateaux du condensateur.

Appelons α l'angle formé par la direction du corpuscule avec le champ magnétique. La force d'origine électromagnétique agissant sur le corpuscule est $Hev \sin \alpha$, perpendiculaire au plan de la vitesse et du champ, c'est-à-dire aux plateaux. Cette force est opposée à la force électrique Fe .

Seuls sortiront du condensateur les rayons pour lesquels on aura

$$v = \frac{F}{H \sin \alpha}.$$

Après être sortis du condensateur, ils subiront une dé-

⁽¹⁾ BÜCHERER, *Math. einföhrung in d. Elektronen-Theorie*, p. 58. Leipzig, 1904.

⁽²⁾ LANGEVIN, *Revue générale des Sciences*, 30 mars 1905.

⁽³⁾ BÜCHERER, *Phys. Zeitsch.*, t. IX, 1908, p. 755.

viation purement magnétique, facile à calculer. La courbe photographique fournit la valeur de $\frac{e}{m}$ pour la vitesse v correspondante. Il est facile de voir alors si l'on obtient une meilleure constance du rapport $\frac{e}{m_0}$ pour $v = 0$ avec une théorie plutôt qu'avec une autre.

Les résultats ont été tout à fait favorables à la théorie de Lorentz-Einstein, de sorte que cette théorie semble être le plus d'accord avec les faits expérimentaux.

Dans les formules de Simon, il faut tenir compte de ce que deux masses entrent en jeu : une masse cinétique et une masse transversale. Ces deux masses ne sont égales que quand la vitesse est très faible.

Ces considérations ont été développées simultanément par Ch.-Eug. Guye ⁽¹⁾ et par Kaufmann ⁽²⁾ dans son dernier travail.

Ce sont ces considérations que nous allons exposer. Envisageons d'abord la correction d'après Abraham.

L'énergie totale de l'électron est, si a est son rayon, V la vitesse de la lumière, e la charge et β le rapport $\frac{v}{V}$ de la vitesse de la particule à la vitesse de la lumière,

$$W = \frac{e^2 V^2}{2a} \left(\frac{1}{\beta} L \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right) = \frac{e^2 V^2}{2a} \left(1 + \frac{2}{3} \beta^2 + \frac{2}{5} \beta^4 + \dots \right).$$

Quand $\beta = 0$, on obtient l'énergie de l'électron au repos, qui se réduit à l'énergie électrostatique et a pour valeur

$$W_0 = \frac{e^2 V^2}{2a}.$$

L'accroissement d'énergie dû au mouvement est donc

⁽¹⁾ Ch.-Eug. GUYE, *Archives des Sciences physiques et naturelles*, mai 1906.

⁽²⁾ KAUFMANN, *Ann. der Physik*, t. XIX, 1906.

représenté par

$$W - W_0 = W_0 \frac{2}{3} \beta^2 \left(1 + \frac{3}{5} \beta^2 \right).$$

Cet accroissement représente l'énergie cinétique que nous pouvons poser égale à $\frac{1}{2} m' v^2$, m' représentant la masse cinétique.

La masse transversale m est donnée par la formule

$$m = m_0 \frac{3}{4} \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta^2} L \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right).$$

Cette expression développée en série donne

$$m = m_0 \left(1 + \frac{6}{3.5} \beta^2 \right), \quad \text{avec} \quad m_0 = \frac{2e^2}{3a}.$$

L'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme

$$W - W_0 = \frac{2e^2}{3a} \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{3}{5} \beta^2 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{5} \beta^2 \right).$$

Nous devons écrire qu'elle est égale à l'énergie fournie à la particule Ve :

$$Ve = \frac{m_0 v^2}{2} \left(1 + \frac{3}{5} \beta^2 \right).$$

La déviation magnétique est donnée par

$$\delta = \frac{e}{m_0 v} M = \frac{e}{m_0 v} M \left(1 - \frac{2}{5} \beta^2 \right),$$

M représentant l'intégrale $\int dx \int H dx$.

Des équations (1) et (2) on tire

$$\frac{e}{m_0} = \frac{2V\delta^2}{M} \left(1 + \frac{1}{5} \beta^2 \right).$$

$1 + \beta^2$ représente le terme par lequel il faudra multiplier les valeurs obtenues pour avoir $\frac{e}{m_0}$, d'après la théorie d'Abraham.

D'une façon analogue, on trouve pour les autres théories les valeurs

$$\frac{e}{m_0} = \frac{2V\hat{o}^2}{M^2} \left(1 + \frac{1}{6} \beta^2 \right),$$

d'après la théorie de Bücherer-Langevin ;

$$\frac{e}{m_0} = \frac{2V\hat{o}^2}{M^2} \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \right).$$

d'après la théorie Lorentz-Einstein.

Si l'on effectue cette correction, on obtient, suivant les trois théories, les valeurs correspondantes :

1,779,	d'après Abraham ;
1,769,	d'après Lorentz ;
1,772,	d'après Bücherer.

Les valeurs ainsi obtenues sont pratiquement identiques au nombre donné par Classen, $1,774.10^7$, et à celui déduit par MM. Cotton et Weiss ⁽¹⁾ du phénomène de Zeemann. Ces savants ont trouvé, en effet, pour $\frac{e}{m}$ une valeur double de $1,77.10^7$.

D'autre part, M. Kaufmann, dans son dernier travail, a donné pour $\frac{e}{m_0}$ les valeurs suivantes :

1,823,	d'après Abraham ;
1,660,	d'après Lorentz ;
1,808,	d'après Bücherer.

Les nombres que j'ai trouvés sont compris entre ces valeurs. Il résulte de cette étude que le nombre admis pour $\frac{e}{m}$, $1,86.10^7$, à la suite des mesures de Simon, est certainement trop fort et que sa valeur exacte est très voisine de $1,77.10^7$.

(1) COTTON et WEISS, *Comptes rendus*, t. 147, 1908, p. 968.

TROISIÈME PARTIE.

Étude de la déviation électrique du faisceau cathodique. — Nous allons, maintenant, comparer l'expression $\frac{mv^2}{e}$ calculée; soit à partir de la formule de Schuster, soit à partir de la déviation électrique.

Dans le premier cas, on a en effet

$$\frac{mv^2}{e} = 2V;$$

dans le second,

$$\frac{mv^2}{e} = \frac{1}{\delta} \int_0^l dx \int \varphi dx.$$

La différence de potentiel V sera mesurée à l'électromètre absolu. L'intégrale double sera calculée, quand on connaîtra la répartition du champ. La déviation δ sera lue sur le fond du tube.

Nous n'avons pas cherché à obtenir $\frac{e}{m}$ au moyen de la formule de déviation électrique, en la combinant avec la formule de déviation magnétique pour la raison suivante : c'est que les deux déviations électrique et magnétique sont produites successivement. La différence de potentiel entre la cathode et l'anode peut changer entre ces deux mesures. En particulier, avec notre tube qui renfermait des masses métalliques assez considérables, nous avons constaté que la différence de potentiel changeait notablement.

Cette détermination ne nous apprendrait d'ailleurs rien de plus que la simple comparaison des deux valeurs obtenues.

Cette comparaison est importante.

En effet, si les valeurs trouvées pour $\frac{mv^2}{e}$ sont identiques aux erreurs d'expérience près, on pourra en déduire que l'emploi des deux méthodes de détermination

de $\frac{e}{m}$ est également justifié, et que ce n'est pas par les hypothèses faites, mais dans leur application qu'il faut expliquer la non-concordance des résultats.

Cette identité lèvera donc directement l'objection faite par J.-J. Thomson à la formule employée par Simon.

D'autre part, si l'on considère que cette démonstration a été faite d'une manière suffisamment rigoureuse par les expériences précédemment décrites, cette identité démontre également l'exactitude du calcul de la déviation électrique.

M. H. Poincaré ⁽¹⁾ avait émis l'hypothèse que la non-concordance de la théorie de Lorentz avec les derniers résultats de Kaufmann pouvait être attribuée à ce que le calcul du champ électrique obtenu en divisant la différence de potentiel par la distance pouvait ne pas être exact, s'il existait une différence de potentiel entre le métal et le vide par exemple.

Les résultats obtenus permettent de voir s'il faut ou non faire intervenir cette hypothèse.

Il est facile de voir tout d'abord qu'on ne peut pas avoir en toute rigueur l'égalité

$${}_2V = \frac{1}{y} \int_0^l dx \int \varphi dx,$$

mais qu'on doit trouver nécessairement

$${}_2V > \frac{1}{y} \int_0^l dx \int \varphi dx.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$A = \int_0^l dx \int \varphi dx.$$

Remarquons que, dans la formule de Schuster, la masse qu'il faut faire intervenir est la masse cinétique.

(1) H. POINCARÉ, *Revue générale des Sciences*, 30 mai 1908.

Appelons m' cette masse.

Si nous nous servons de la formule d'Abraham, nous aurons la relation suivante, qui donne la valeur de la masse cinétique m' en fonction de la masse m_0 pour une vitesse nulle :

$$m' = m_0 \left(1 + \frac{2}{5} \beta^2 \right),$$

β étant le rapport de la vitesse de la particule à la vitesse de la lumière.

Dans la déviation électrique, c'est la masse transversale qui entre dans les formules. En nous servant des formules d'Abraham, nous aurons

$$\frac{mv^2}{e} = \frac{A}{\gamma} = m_0 \left(1 + \frac{2}{5} \beta^2 \right) \frac{v^2}{e}.$$

D'où l'on tire les deux relations

$$\frac{m_0 v^2}{e} = \frac{{}_2V}{1 + \frac{3}{5} \beta^2}, \quad \frac{m_0 v^2}{e} = \frac{A}{\gamma \left(1 + \frac{2}{5} \beta^2 \right)}.$$

Par conséquent,

$${}_2V = \frac{A}{\gamma} \frac{1 + \frac{3}{5} \beta^2}{1 + \frac{2}{5} \beta^2}.$$

Avec une approximation suffisante, nous aurons

$${}_2V = \frac{A}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{5} \beta^2 \right).$$

On a donc bien

$${}_2V > \frac{A}{\gamma}.$$

Suivant les théories admises, le facteur par lequel il faut multiplier $\frac{A}{\gamma}$ pour avoir ${}_2V$ variera.

Suivant la théorie de Lorentz, on aurait

$${}_2V = \frac{A}{\gamma} \left(1 + \frac{\beta^2}{4} \right).$$

Suivant la théorie de Bücherer,

$${}_2V = \frac{A}{\gamma} \left(1 + \frac{\beta^2}{6} \right).$$

Détermination de l'intégrale $\int dx \int \varphi dx$. — Pour que le calcul de cette intégrale double ait un sens, il faut que le champ électrique soit défini d'une manière précise aussi bien entre les plateaux qu'en dehors.

Ce n'est pas ce qui était réalisé généralement dans les expériences faites antérieurement sur la déviation électrostatique des rayons cathodiques.

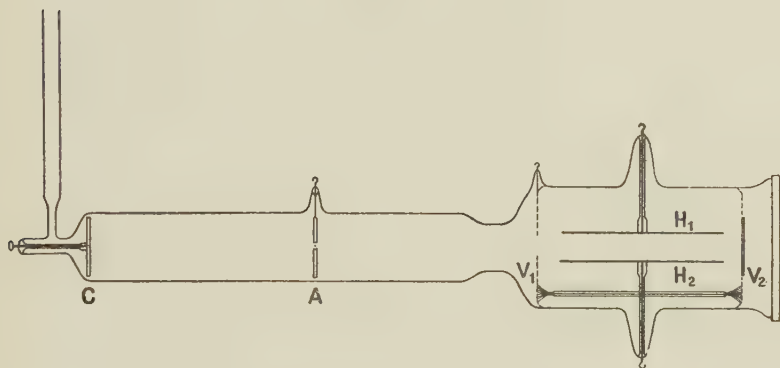


Fig. 10.

Les deux plateaux, entre lesquels on produisait le champ, étaient placés à l'intérieur d'un tube, dont les parois se trouvaient à une certaine distance de ces plateaux. C'était sur le fond du tube qu'on observait les déviations. Dans ces conditions, on peut connaître d'une manière suffisante le champ entre les plateaux; mais, extérieurement, que devient le champ? Quel rôle jouent les parois? Ce sont autant de questions auxquelles il est impossible de répondre d'une manière précise.

Pour obvier à cet inconvénient, la disposition suivante a été adoptée :

Les deux plateaux horizontaux parallèles qui produisaient le champ étaient longs par rapport à leur écartement et suffisamment larges. De cette façon, le champ était constant dans la plus grande partie du tube.

Pour que la partie variable du champ soit la plus courte possible, des plateaux horizontaux étaient placés entre deux plateaux verticaux. La distance du plateau vertical aux bords des plateaux horizontaux était petite.

Ces deux plateaux verticaux étaient au potentiel zéro ; l'un des plateaux horizontaux était porté au potentiel $+V$ et l'autre au potentiel $-V$.

Nous allons chercher la distribution du champ électrique dans le plan vertical qui contient l'axe du tube. La direction du faisceau cathodique doit coïncider avec cet axe. C'est donc dans ce plan que doit se produire la déviation étudiée.

Chaque point du plan sera défini par ses coordonnées x et y rapportées à deux axes rectangulaires. L'axe du tube situé à égale distance des deux plateaux horizontaux sera pris pour axe des x , et la droite verticale tangente aux bords des plateaux horizontaux pour axe des y .

Nous supposerons d'abord que les plateaux sont prolongés indéfiniment et nous n'étudierons que le bord libre.

Pour effectuer ce calcul, nous aurons recours à l'emploi des imaginaires conjugués. Je suis très reconnaissant à M. Pellat de m'avoir montré l'emploi qu'on pouvait faire de ce mode de calcul dans le cas proposé.

L'emploi des imaginaires conjugués pour la résolution de pareils problèmes avait été indiqué par Kirchhoff, puis par Maxwell.

M. Potier, dans la traduction française du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell, développa la théorie de ces imaginaires conjugués, en l'étendant à de nouveaux exemples.

Si le champ électrique est produit par un système de

conducteurs à contour linéaire, et qu'il puisse être considéré comme n'étant fonction que de x et de y , la section de ces conducteurs par le plan des xy sera représentée par un système de droites se coupant sous certains angles.

Chaque point des conducteurs sera caractérisé par la valeur de l'imaginaire $z = x + yi$ en ce point.

On peut alors prendre une autre variable complexe $t = r + si$ dans un autre plan et reliée à la variable z :

$$z = f(t).$$

Nous ferons décrire à t un certain contour fermé et, si la fonction est convenablement choisie, à chaque valeur de t sur le contour fermé correspondra une valeur de z sur les conducteurs. De plus, à tout point t situé à l'intérieur du contour fermé correspondra un point z entre les conducteurs.

Il est possible de trouver une fonction de t qui représente le potentiel pour toute valeur de t , et par conséquent pour toute valeur de z . On en déduit la valeur du champ.

Pour satisfaire au cas proposé, l'équation qui relie z à t doit être la suivante :

$$(1) \quad dz = - \frac{(t^2 - a^2)(t^2 + c^2)}{t\sqrt{(t^2 + b^2)(t^2 + d^2)}} dt,$$

b, c et d étant des constantes réelles et positives avec l'inégalité

$$b > c > d.$$

L'intégrale de l'équation (1) sera

$$(2) \quad z - C = - \frac{1}{2} \sqrt{(t^2 + b^2)(t^2 + d^2)} \\ + 2 \frac{(a^2 - c^2) + b^2 + d^2}{4} L \frac{\sqrt{t^2 + b^2} + \sqrt{t^2 + d^2}}{\sqrt{t^2 + b^2} - \sqrt{t^2 + d^2}} \\ + \frac{a^2 c^2}{2bd} L \frac{b\sqrt{t^2 + d^2} - d\sqrt{t^2 + b^2}}{b\sqrt{t^2 + d^2} + d\sqrt{t^2 + b^2}}.$$

Le parcours que nous ferons suivre à t est celui qui est indiqué sur la figure, dans lequel le point représentatif

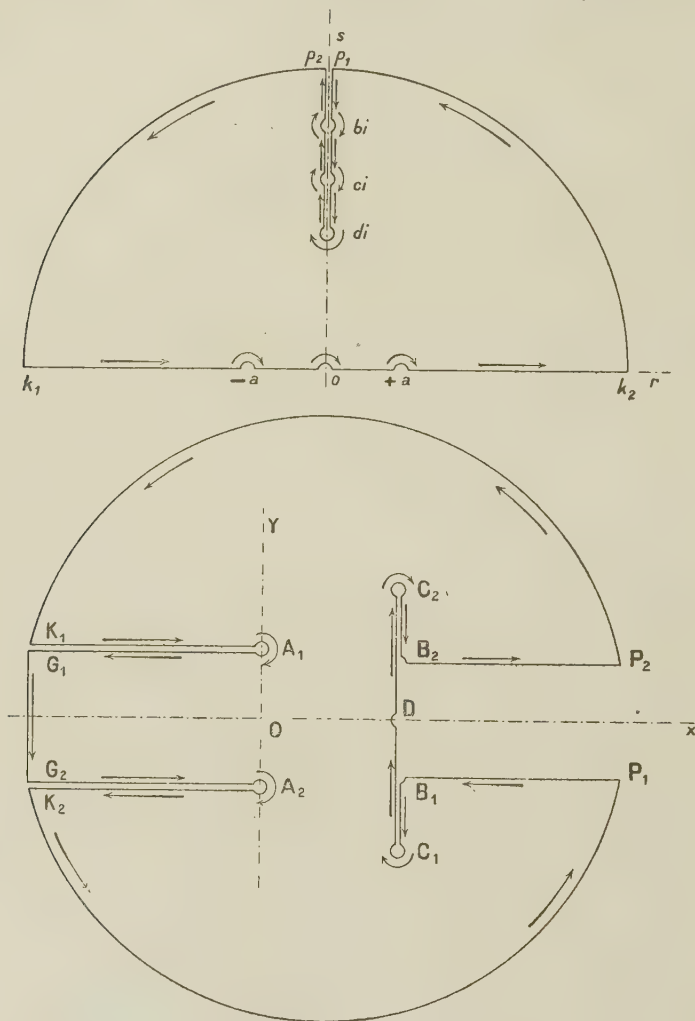


Fig. 11.

contourne les points d'affixe $-a$, 0 , $+a$, bi , ci , di , pour lesquels dz deviendrait nul ou infini.

Nous allons voir maintenant qu'en faisant suivre à t ce contour, le point z décrira le contour qui représente la section par le plan des xy des conducteurs.

Donnons à t une valeur réelle, négative et très grande, $z - C$, par conséquent z devient alors négatif et très grand.

L'imaginaire dz étant réelle pour t réel, dy est nul; autrement dit, y est constant et z décrit une parallèle à l'axe des x dans le même sens que t , car, tant que t est supérieur en valeur absolue à a , dz est positif.

Tout près de $-a$, t décrit un demi-cercle de rayon ε :

$$t = -a - \varepsilon e^{-i\omega}, \quad dt = \varepsilon i e^{-i\omega} d\omega, \\ t^2 = a^2 + 2a\varepsilon e^{-i\omega} + \varepsilon^2 e^{-2i\omega}.$$

ε étant un infiniment petit du premier ordre, ε^2 est un infiniment petit du second ordre et négligeable vis-à-vis de ε , lui-même négligeable vis-à-vis de quantités finies.

Par conséquent,

$$dz = - \frac{2\varepsilon e^{-i\omega}(a^2 + c^2)\varepsilon i e^{-i\omega} d\omega}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)}} \\ = 2\varepsilon^2 i e^{-2i\omega} d\omega \frac{a^2 + c^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)}}.$$

Par intégration, on a

$$z = - \frac{(a^2 + c^2)\varepsilon^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + d^2)}} e^{-2i\omega} + C.$$

Quand t décrit un demi-cercle, c'est-à-dire quand ω varie de π , z décrit un cercle complet 2π autour du point A.

Quand t décrit la portion de droite depuis $-a + \varepsilon$ jusqu'à $-\varepsilon$, dz ayant changé de signe par suite du changement de signe de $t^2 - a^2$, le point z s'éloigne à l'infini sur la même droite.

Quand le point t arrive au point $-\varepsilon$, il décrit un

demi-cercle de rayon ε :

$$t = -\varepsilon e^{-i\omega}, \quad dt = \varepsilon i e^{-i\omega} d\omega.$$

Ces expressions, portées dans la valeur générale de dz avec les mêmes restrictions que précédemment, donnent

$$dz = \frac{a^2 c^2}{-\varepsilon e^{-i\omega} b d} \varepsilon i e^{-i\omega} d\omega = -i \frac{a^2 c^2}{b d} d\omega.$$

En intégrant, on obtient

$$z = -i \frac{a^2 c^2}{b d} \omega + C.$$

Quand ω varie de zéro à π , le point z décrit une droite située à l'infini, perpendiculaire à la direction des x et de longueur

$$\frac{a^2 c^2}{b d} \pi,$$

dans le sens des γ négatifs, puisqu'il y a le signe — devant dz .

z décrit la droite $G_1 G_2$.

A partir de ce moment, t devient positif et réel, et il est facile de voir que, tandis que le point t va de 0 en K_2 en suivant le contour, z décrit le contour $G_2 A_2 K_2$.

Le point t étant à l'infini, si nous lui faisons décrire un arc de cercle de rayon infini,

$$t = R e^{i\omega}, \quad dt = R i e^{i\omega} d\omega.$$

Les quantités a, b, c, d étant finies et par suite négligeables devant les quantités infinies, la valeur de dz se réduit à

$$dz = -i R^2 e^{2i\omega} d\omega,$$

$$z = -\frac{R^2}{2} e^{2i\omega} + C.$$

Le point z décrira donc une portion de circonférence d'angle 2ω , si t a tourné de ω .

Si donc nous faisons décrire à t un quart de cercle $\frac{\pi}{2}$, z décrira une portion de circonférence vue de son centre sous l'angle π , ce qui nous conduira en P_1 , car P_1P_2 est négligeable vis-à-vis de la circonférence de rayon infini.

Nous nous trouvons alors sur l'axe imaginaire des t ,

$$t = si, \quad dt = i ds.$$

Portons cette valeur de t dans l'expression générale de dz :

$$dz = \frac{(s^2 + a^2)(-s^2 + c^2)}{s\sqrt{(-s^2 + b^2)}\sqrt{-s^2 + d^2}} ds.$$

Il est important de séparer les radicaux pour mettre en évidence les imaginaires.

Si nous prenons $s > b > c > d$, nous aurons

$$\begin{aligned} (-s^2 + c^2) &= -(s^2 - c^2); \\ \sqrt{-s^2 + d^2} &= i\sqrt{s^2 - d^2}; \quad \sqrt{-s^2 + b^2} = i\sqrt{s^2 - b^2}; \\ dz &= \frac{(s^2 + a^2)(s^2 - c^2)}{s\sqrt{s^2 - b^2}\sqrt{s^2 - d^2}} ds. \end{aligned}$$

Donc, quand s diminue depuis l'infini jusqu'à b , ds est négatif et dz de même. Le point z décrit la droite P_1B_1 .

Quand t tourne autour du point bi ,

$$t = bi - \varepsilon e^{-i\omega}, \quad t^2 = -b^2 - 2bi\varepsilon e^{-i\omega}, \quad dt = \varepsilon i e^{-i\omega} d\omega.$$

Ces valeurs, portées dans l'expression de dz donnent

$$\begin{aligned} dz &= \frac{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}{bi\sqrt{b^2 - d^2}\sqrt{2bi\varepsilon e^{-i\omega}}} \varepsilon i e^{-i\omega} d\omega \\ &= \frac{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}{\sqrt{2}b^{\frac{3}{2}}i^2\sqrt{b^2 - d^2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega}{2}} d\omega; \\ z &= \frac{(a^2 + b^2)(b^2 - c^2)}{\sqrt{2}b^{\frac{3}{2}}\sqrt{i}\sqrt{b^2 - d^2}} 2\varepsilon^{\frac{1}{2}} i e^{-\frac{i\omega}{2}} + C. \end{aligned}$$

Quand t tournera d'une demi-circonférence π , z tournera de $\frac{\pi}{2}$; t variant ensuite de b à c , dz devient alors égal à

$$dz = \frac{(s^2 + a^2)(s^2 - c^2)}{s\sqrt{b^2 - s^2}\sqrt{s^2 - d^2}} i ds.$$

Le point z décrit la droite $B_1 C_1$. Arrivé en c , le point t décrit un demi-cercle :

$$t = ci - \varepsilon e^{-i\omega},$$

$$dz = -2 \frac{c^2 + a^2}{\sqrt{b^2 - c^2}\sqrt{c^2 - d^2}} \varepsilon^2 e^{-2i\omega} d\omega.$$

Le point t tournant de π autour du point c , le point z tourne de 2π autour de C_1 :

L'argument ayant augmenté de 2π , la nouvelle droite que décrit z , quand le point t varie de c à d , est parallèle à $B_1 C_1$, mais décrite en sens inverse.

Le point z parcourt la droite $C_1 D$.

Quand le point t tourne autour de di , dz prend la forme

$$dz = A \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega}{2}} d\omega.$$

Si donc t tourne de 2π , z tournera seulement de π et, tandis que t variera de di à ci , z parcourra la droite DC_2 . On voit ainsi que, pendant que t parcourra le contour $dcbp_2$, le point z parcourra le trajet $DC_2 B_2 P_2$.

Quand t décrira le quart de cercle $p_2 k_1$, z décrira le demi-cercle $P_2 K_1$, qui ramènera au point de départ.

Ainsi la fonction choisie correspond exactement au parcours indiqué. Il ne reste plus qu'à donner aux coefficients les valeurs correspondantes au cas étudié.

Comme nous n'avons que trois paramètres à exprimer dans le plan des z , à savoir :

H , longueur du demi-plateau vertical;

G, distance du plateau vertical aux bords des plateaux horizontaux;

D, distance des plateaux horizontaux;

il suffit de réduire à trois le nombre des paramètres :

$$a, \quad b, \quad c, \quad d.$$

L'un des paramètres étant indéterminé, posons donc la condition

$$(3) \quad 2(a^2 - c^2) + b^2 + d^2 = 0.$$

Ceci fait disparaître le second terme de la valeur de $z - C$.

En outre, nous pouvons considérer c et b comme infiniment grands vis-à-vis de a et de d , ce qui n'aura d'autre effet que de rendre H infiniment grand, D et G gardant des valeurs finies. On peut le voir directement sur la figure. Si, en effet, d est fini et c très grand, il faut que la distance dc soit très grande et que, par conséquent, la droite correspondante DC soit elle-même très grande. b est *a fortiori* très grand vis-à-vis de a et de d .

La relation peut s'écrire

$$2c^2 = 2a^2 + d^2 + b^2,$$

et, comme b^2 est infiniment grand vis-à-vis de $a^2 + d^2$, on a simplement

$$2c^2 = b^2, \quad b = c\sqrt{2}.$$

Nous avons vu que D , distance des plateaux, égale à la droite $G_1 G_2$, était donnée par

$$(4) \quad D = \frac{\pi a^2 c^2}{bd} = \frac{\pi a^2 c}{\sqrt{2}d}.$$

De ces relations on tire en outre

$$\frac{b}{2} = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{dD}{\pi a^2}.$$

L'expression générale de $z - C$ devient

$$(5) \quad z - C = -\frac{dD}{\pi a^2} \sqrt{t^2 + d^2} + \frac{D}{2\pi} L \frac{\sqrt{t^2 + d^2} - d}{\sqrt{t^2 + d^2} + d},$$

pour les valeurs de t ayant un module fini qui seules nous intéressent.

Posons

$$\frac{\sqrt{t^2 + d^2}}{d} = u, \quad \frac{a^2}{d^2} = m.$$

L'expression de $z - C$ devient

$$z - C = -\frac{d^2 D}{\pi a^2} u + \frac{D}{2\pi} L \frac{u-1}{u+1}.$$

Mais on a

$$L \frac{u-1}{u+1} = -L \frac{u+1}{u-1} = -\left(\pi i + L \frac{1+u}{1-u}\right).$$

En appelant C' une nouvelle constante,

$$z - C' = -\frac{uD}{\pi m} - \frac{D}{2\pi} L \frac{1+u}{1-u}.$$

Déterminons la constante d'intégration de façon que l'axe $y'y'$ passe par le bord des plateaux horizontaux et que l'axe $x'x$ passe par le milieu de la distance de ces plateaux.

On a alors pour le point A_1

$$x = 0, \quad y = \frac{D}{2}, \quad z = x + yi = \frac{D}{2}i.$$

Pour $t = -a$ il vient

$$u = \frac{\sqrt{t^2 + d^2}}{d} = \frac{\sqrt{a^2 + d^2}}{d} = \sqrt{1+m}.$$

La valeur de z précédemment obtenue, portée dans

l'expression générale de z , donne

$$\frac{D}{2} i - C' = -\frac{D}{\pi m} \sqrt{1+m} - \frac{D}{2\pi} L \frac{1+\sqrt{1+m}}{1-\sqrt{1+m}},$$

$$C' = \frac{D}{2} i + \frac{D}{\pi m} \sqrt{1+m} + \frac{D}{2\pi} L \frac{1+\sqrt{1+m}}{1-\sqrt{1+m}}.$$

Cette constante, reportée dans l'expression générale de z , donne alors

$$(6) \quad 2\pi \frac{z}{D} = \pi i + 2 \frac{\sqrt{1+m}}{m} + L \frac{1+\sqrt{1+m}}{1-\sqrt{1+m}} - \frac{2}{m} u - L \frac{1+u}{1-u}.$$

Le point D correspond à $t = di$. Pour cette valeur $u = 0$.

En appelant z_1 l'affixe du point D,

$$(7) \quad 2\pi \frac{z_1}{D} = 2 \frac{\sqrt{1+m}}{m} + L \frac{\sqrt{1+m} + 1}{\sqrt{1+m} - 1} = 2\pi \frac{G}{D},$$

puisque z_1 est égal à G .

Cette relation fait connaître la constante m en fonction de $\frac{G}{D}$.

Posons, pour simplifier,

$$\sqrt{1+m} = K, \quad \text{d'où} \quad m = K^2 - 1,$$

$$(8) \quad 2\pi \frac{G}{D} = \frac{2K}{K^2-1} + L \frac{K+1}{K-1} = \frac{2K}{K^2-1} + \frac{1}{M} \log \frac{K+1}{K-1}.$$

De cette équation, connaissant G et D , on peut facilement déduire K .

La relation générale devient, par l'introduction de K ,

$$(9) \quad 2\pi \frac{z}{D} = \frac{2K}{K^2-1} + L \frac{K+1}{K-1} - \frac{2}{K^2-1} u - L \frac{1+u}{1-u}$$

ou encore

$$(10) \quad 2\pi \frac{G-z}{D} = \frac{2}{K^2-1} u + L \frac{1+u}{1-u}.$$

D'autre part, pour toute valeur finie du module de t , l'équation (1) devient, b et c étant infiniment grands vis-à-vis de t fini,

$$t \frac{dz}{dt} = - \frac{c^2(t^2 - a^2)}{b\sqrt{t^2 + d^2}} = - \frac{c(t^2 - a^2)}{\sqrt{2}\sqrt{t^2 + d^2}} = - \frac{D}{\pi} \frac{d}{a^2} \frac{t^2 - a^2}{\sqrt{t^2 + d^2}}$$

$$= - \frac{D}{\pi} \frac{1}{m} \frac{u^2 - (1+m)}{u},$$

$$(11) \quad t \frac{dz}{dt} = - \frac{D}{\pi} \frac{1}{K^2 - 1} \frac{u^2 - K^2}{u}.$$

On peut voir que, si t varie de di à ci , u devient imaginaire de la forme

$$u = \pm \nu i,$$

où ν est réel et positif, ν varie de 0 pour $t = di$ à $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire l'infini pour $t = ci$.

La relation devient

$$(12) \quad 2\pi \frac{G-z}{D} = \pm i \left(\frac{2}{K^2 - 1} \nu + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \nu \right).$$

z varie donc par sa partie imaginaire de la valeur $z = G$, qui correspond à $\nu = 0$, jusqu'à des valeurs de la forme

$$z = G \pm Fi,$$

où F varie de zéro à l'infini, c'est-à-dire que le plateau $C_1 D C_2$ est décrit et qu'on a $H = \infty$.

Posons

$$(13) \quad W = U + iV = \frac{V_0}{\pi} L t,$$

U et V étant deux fonctions réelles de x et de y . On voit aisément que :

1° Sur le plateau $K_1 A_1 G_1$, t étant réel et négatif, la fonction W devient, en désignant par $\bar{t}$ la valeur absolue de t ,

$$W = \frac{V_0}{\pi} L - \bar{t} = \frac{V_0}{\pi} (\pi i + L \bar{t}),$$

d'où l'on tire

$$V = V_0;$$

2° Sur le plateau inférieur t est réel et positif, donc

$$V = 0;$$

3° Sur le plateau vertical C_1DC_2 ainsi que sur l'axe $x'Ox$ qui correspondent à $t = si$, on a

$$W = \frac{V_0}{\pi} Lsi = \frac{V_0}{\pi} (Ls + Li) = \frac{V_0}{\pi} \left(Ls + \frac{\pi}{2} i \right),$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{V_0}{2}.$$

D'autre part, on peut voir aussi que V satisfait à la relation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Ainsi V , prenant aux limites les valeurs assignées au potentiel et ayant sa laplacienne nulle, représente partout le potentiel.

En désignant par φ la composante du champ électrique parallèle à yy' on a

$$-\varphi = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Or la dérivation donne

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_0}{\pi} \frac{1}{t} \frac{dt}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{V_0}{\pi} \frac{1}{t} \frac{dt}{dz} t.$$

Mais on a

$$\frac{1}{t} \frac{dt}{dz} = \frac{1}{t \frac{dz}{dt}}.$$

L'équation (11) donne la valeur de $t \frac{dz}{dt}$. Il vient donc

$$\frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{V_0}{\pi} \frac{\pi}{D} \frac{(K^2 - 1)u}{u^2 - K^2} i = \varphi_0 (K^2 - 1) \frac{u}{k^2 - u^2} i,$$

si l'on pose

$$\varphi_0 = -\frac{V_0}{D}.$$

Donc, en définitive,

$$(14) \quad \varphi = \varphi_0(K^2 - 1) \frac{u}{K^2 - u^2}.$$

Pour $y = 0$ et $x = -\infty$ on a $u = 1$; d'où $\varphi = \varphi_0$.

Ainsi φ_0 représente le champ entre les plateaux à l'infini des bords.

Pour tous les points de la ligne médiane Ax , u est réel, positif, inférieur à 1, par conséquent à K , et le second membre, étant réel, donne la valeur du champ.

En résumé, les calculs à effectuer seront les suivants :

1° Calculer K par la relation (8)

$$\frac{2K}{K^2 - 1} + \frac{1}{M} \log \frac{K + 1}{K - 1} = 2\pi \frac{G}{D}.$$

Pour obtenir rapidement cette valeur, le plus simple est d'opérer de la façon suivante : on portera en abscisses les valeurs de K et en ordonnées au-dessus de la ligne des abscisses la courbe $L \frac{K + 1}{K - 1}$ et au-dessous de cette ligne la courbe $\frac{2K}{K^2 - 1}$. De cette façon la distance sur une parallèle à l'axe des ordonnées des deux courbes représente le premier membre de la relation. Il suffit donc, connaissant $2\pi \frac{G}{D}$, de déplacer une règle divisée parallèlement à l'axe des ordonnées jusqu'à ce que la distance des deux courbes reproduise la valeur calculée $2\pi \frac{G}{D}$.

La valeur de K correspondante donne déjà une première approximation. Pour l'avoir avec plus d'exactitude, il suffit de porter cette valeur dans l'expression de $L \frac{K + 1}{K - 1}$ et de tirer K de la relation. On arrive rapidement par deux ou trois opérations à obtenir K avec toute l'exactitude désirable.

2° Calculer z par la relation (10)

$$2\pi \frac{G-z}{D} = \frac{2}{K^2-1} u + L \frac{1+u}{1-u}.$$

Sur l'axe $x'x$, z est réel, et par conséquent u également. Il suffira donc de donner à u des valeurs variant de 0 à 1 et de calculer les valeurs correspondantes de z .

3° Calculer φ en fonction de u par la relation (14)

$$\varphi = \varphi_0 (K^2 - 1) \frac{u}{K^2 - u^2}.$$

D'autre part, les valeurs correspondantes de u et de x étant établies précédemment, on aura également φ en fonction de x .

On peut donc tracer la courbe du champ électrique :

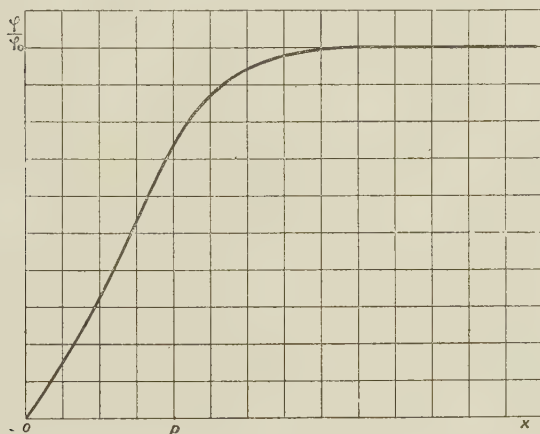


Fig. 12.

Le champ peut être considéré comme rigoureusement constant à l'intérieur des plateaux jusqu'à une faible distance des bords. Puis il décroît très brusquement et devient nul sur le plateau vertical.

Le calcul qui vient d'être fait pour l'un des côtés des

plateaux horizontaux peut être répété pour l'autre, puisque la disposition du tube est symétrique.

Nous avons vu que la déviation y , produite par le champ électrique parallèle à l'axe des y , à une distance x du point où commence le champ, était donnée par

$$y = \frac{e}{mv^2} \int_0^x dx \int \varphi dx,$$

φ étant la valeur du champ sur la trajectoire de la particule.

Pour effectuer commodément ce calcul, nous supposons que ce champ est le même que sur l'axe à la même abscisse.

Cette intégration pourrait être effectuée graphiquement. Mais cette opération devrait être recommencée chaque fois que serait changée la distance du plateau vertical aux plateaux horizontaux.

Il est donc préférable de l'effectuer par le calcul. Le champ électrique φ est donné par l'expression

$$\varphi = \varphi_0 (K^2 - 1) \frac{u}{K^2 - u^2}.$$

D'autre part, sur l'axe $x'x$ on a

$$2\pi \frac{G - x}{D} = \frac{2}{K^2 - 1} u + L \frac{1 + u}{1 - u}.$$

Différentions cette expression ; il vient

$$- \frac{2\pi dx}{D} = \frac{2}{K^2 - 1} du + \frac{2 du}{1 - u^2},$$

d'où

$$dx = - \frac{D}{\pi} \frac{du}{K^2 - 1} - \frac{D}{\pi} \frac{du}{1 - u^2}.$$

Formons φdx

$$\varphi dx = - \frac{D}{\pi} \frac{1}{K^2 - 1} \varphi_0 (K^2 - 1) \frac{u du}{K^2 - u^2} - \frac{D}{\pi} \varphi_0 \frac{(K^2 - 1) u du}{(K^2 - u^2)(1 - u^2)}.$$

En réduisant au même dénominateur et simplifiant, il vient

$$\varphi dx = - \frac{D\varphi_0}{\pi} \frac{u du}{1-u^2}.$$

Par conséquent,

$$\int \varphi dx = - \int_{u=0}^u \frac{D\varphi_0}{\pi} \frac{u du}{1-u^2} = \frac{\varphi_0 D}{2\pi} L(1-u^2).$$

D'autre part, comme $\varphi_0 = - \frac{V_0}{D}$,

$$(15) \quad \int \varphi dx = - \frac{V_0}{2\pi} L(1-u^2),$$

expression très simple, positive puisque $L(1-u^2)$ est négatif, qui permet de calculer l'intégrale du champ électrique dans les parties où il est variable.

Nous décomposerons l'intégrale du champ électrique le long de la droite située au milieu des deux plateaux horizontaux, entre les deux plateaux verticaux, en trois parties.

Après avoir choisi une valeur de u telle que le champ φ correspondant à cette valeur soit très voisin de φ_0 , on calculera la valeur de x correspondante. Soit x_1 cette valeur pour l'un des côtés, par exemple le côté où pénètre le faisceau cathodique, x_1 étant compté à partir du plateau vertical.

L'abscisse du second plateau vertical étant x_3 , calculons de la même façon la distance de ce plateau à l'abscisse correspondant à la même valeur de u que précédemment, avec les données relatives à ce côté. L'abscisse x_3 , diminuée de cette distance, donne l'abscisse x_2 de ce point par rapport aux axes de coordonnées précédemment choisis.

Il reste à former l'intégrale double $\int dx \int \varphi dx$:

$$\int dx \int \varphi dx = - \frac{V_0}{2\pi} \int L(1-u^2) dx.$$

Remplaçons dx par sa valeur en fonction de u :

$$(16) \quad \int dx \int \varphi dx = \frac{V_0 D}{2\pi^2(K^2-1)} \int L(1-u^2) du \\ + \frac{V_0 D}{2\pi^2} \int \frac{L(1-u^2)}{1-u^2} du.$$

La première intégrale a pour valeur

$$\int L(1-u^2) du = L \frac{1+u}{1-u} + uL(1-u^2) - 2u;$$

quant à la seconde, elle s'éliminera d'elle-même dans le calcul, comme nous allons le voir.

L'aire $\int_{x_1}^{x_3} dx \int \varphi dx$ peut se décomposer en trois parties, qui sont respectivement comprises entre 0 et x_1 , x_1 et x_2 , x_2 et x_3 :

La première partie

$$\int_0^{x_1} dx \int \varphi dx = \frac{V_0 D}{2\pi^2(K_1^2-1)} \int L(1-u^2) du \\ + \frac{V_0 D}{2\pi^2} \int \frac{L(1-u^2)}{1-u^2} du,$$

K_1 étant relatif aux distances D et G_1 .

Dans la seconde partie, le champ étant uniforme de x_1 à x_2 et égal à φ_0 , nous aurons

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int \varphi dx = \frac{x_2-x_1}{2} \left(\int_0^{x_1} \varphi dx + \int_0^{x_2} \varphi dx \right).$$

Or, d'après le résultat précédemment obtenu,

$$\int_0^{x_1} \varphi dx = \frac{\varphi_0 D}{2\pi} L(1-u^2), \\ \int_0^{x_2} \varphi dx = \int_0^{x_1} \varphi dx + (x_2-x_1)\varphi_0 \\ = \frac{\varphi_0 D}{2\pi} L(1-u^2) + (x_2-x_1)\varphi_0.$$

Donc, en définitive,

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int \varphi dx = \frac{x_2 - x_1}{2} \left[\frac{\varphi_0 D}{\pi} L(1 - u^2) + (x_2 - x_1) \varphi_0 \right].$$

Reste à évaluer la troisième partie :

$$\int_{x_2}^{x_3} dx \int \varphi dx.$$

Comme la figure le montre,

$$\int_{x_2}^{x_3} dx \int \varphi dx = \text{aire } CDC''D' - \text{aire } C'C''D'.$$

Or cette aire $C'C''D'$ n'est autre que l'aire qu'on aurait

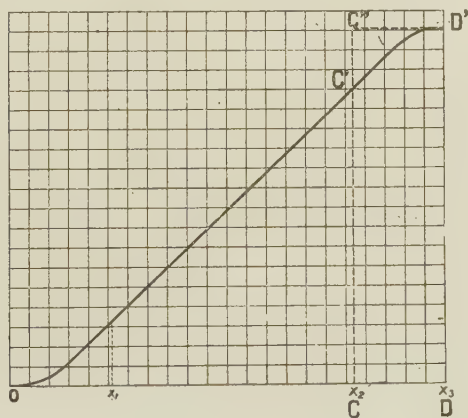


Fig. 13.

obtenue, si l'on avait commencé à évaluer l'intégrale double par l'autre bout, dans la partie où le champ est variable.

Donc

$$\begin{aligned} \int_{x_2}^{x_3} dx \int \varphi_1 dx &= (x_3 - x_2) \int_0^{x_3} \varphi_1 dx \\ &\quad - \frac{V_0 D}{2\pi^2} \left[\frac{1}{K_2^2 - 1} \int L(1 - u^2) du + \int \frac{L(1 - u^2)}{1 - u^2} du \right] \\ &= (x_3 - x_2) \left[\frac{\varphi_0 D}{\pi} L(1 - u^2) + (x_2 - x_1) \varphi_0 \right] \\ &\quad - \frac{V_0 D}{2\pi^2} \left[\frac{1}{K_2^2 - 1} \int L(1 - u^2) du + \int \frac{L(1 - u^2)}{1 - u^2} du \right]. \end{aligned}$$

En réunissant ces trois intégrales doubles on voit immédiatement que $\int \frac{L(1 - u^2)}{1 - u^2} du$ disparaît.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} (17) \quad \int_0^{x_3} dx \int \varphi dx &= \frac{V_0 D}{2\pi^2} \left(\frac{1}{K_1^2 - 1} - \frac{1}{K_2^2 - 1} \right) \int_0^u L(1 - u^2) du \\ &\quad - V_0 \left(\frac{x_2 - x_1}{2} + x_3 - x_2 \right) \left[\frac{L(1 - u^2)}{\pi} + \frac{x_2 - x_1}{D} \right]. \end{aligned}$$

Dans le cas où K_1 est égal à K_2 , c'est-à-dire quand les distances des deux plateaux verticaux aux bords des plateaux horizontaux sont les mêmes, l'intégrale double se réduit au second terme.

En tous cas, quand G_1 et G_2 sont peu différents, le premier terme est toujours petit vis-à-vis du second.

Ces formules ont été établies dans le cas théorique où les plateaux verticaux ne seraient percés d'aucun trou. Mais, dans la pratique, ce n'est pas possible. Il faut que le plateau vertical antérieur soit muni d'une fente, afin de laisser passer le faisceau cathodique et que le plateau postérieur en soit également muni, afin que les rayons viennent frapper une plaque fluorescente de verre d'urane placée derrière ce plateau.

Détermination numérique de la valeur de l'intégrale $\int_n^{x_3} dx \int \varphi dx$. — On détermine d'abord K par la méthode précédemment indiquée. On trouva ainsi, du côté pour lequel on avait

$$G = 1,33, \quad D = 1,55, \quad \text{la valeur} \quad K_1 = 1,331,$$

et du côté pour lequel on avait

$$G = 1,00, \quad D = 1,55, \quad \text{la valeur} \quad K_2 = 1,492.$$

Il reste à déterminer les abscisses $x_1, x_2; x_3$ est tout déterminé, puisqu'il représente la distance des deux plateaux verticaux, qui est mesurée directement.

x_1 sera déterminé par la formule

$$2\pi \frac{x_1}{D} = \frac{2}{K^2 - 1} u + L \frac{1 + u}{1 - u},$$

l'origine des abscisses étant comptée à partir du plateau vertical d'entrée.

Nous devons prendre une valeur de u telle que le rapport $\frac{\varphi}{\varphi_0}$ soit très voisin de l'unité, c'est-à-dire très voisin de ce qu'il serait au centre de plateaux infinis.

Le calcul montre que, pour la valeur $u = 0,999$, la quantité $\frac{\varphi}{\varphi_0}$ est égale à 0,996 pour la valeur $K_1 = 1,331$ et à 0,997 pour la valeur $K_2 = 1,492$.

Il suffit donc de s'arrêter à cette valeur de u qui correspond pour x_1 à une distance $x_1 = 2,51$, et comme le plateau vertical d'entrée est à 1^{cm},33 de distance du bord antérieur des plateaux horizontaux, on voit qu'à 1^{cm},18 du bord dans l'intérieur des plateaux le champ est les 0,996 de ce qu'il serait au centre.

On voit ainsi, comme le montre la courbe déjà tracée du champ électrique, que le champ électrique croît très rapi-

dement dans un espace très court, condition particulièrement favorable pour les mesures.

Pour avoir x_2 , il faut remarquer que le champ, après être resté constant entre les plateaux sur un long espace, décroît quand on s'approche du plateau vertical postérieur pour devenir nul sur ce plateau.

Il suffit de calculer comme précédemment, à partir du plateau, la distance correspondante à $u = 0,999$.

Cette distance, retranchée de la distance qui sépare les deux plateaux verticaux, donnera x_2 . On trouve ainsi

$$\begin{aligned}x_2 &= 11,0 - 2,27 = 8,73, \\x_3 &= 11,0.\end{aligned}$$

Nous avons vu que l'intégrale doublée était donnée par la formule

$$\begin{aligned}\int_0^{x_3} dx \int \varphi dx &= \frac{V_0 D}{2\pi^2} \left(\frac{1}{K_1^2 - 1} - \frac{1}{K_2^2 - 1} \right) \int L(1 - u^2) du \\&\quad - V_0 \left(\frac{x_2 - x_1}{2} + x_3 - x_2 \right) \left(L \frac{1 - u^2}{\pi} + \frac{x_2 - x_1}{D} \right).\end{aligned}$$

Le premier terme est négligeable vis-à-vis du second.

Il reste donc

$$\int_0^{x_3} dx \int \varphi dx = -V_0 \left(\frac{x_2 - x_1}{2} + x_3 - x_2 \right) \left(L \frac{1 - u^2}{\pi} + \frac{x_2 - x_1}{D} \right).$$

Nous connaissons toutes les grandeurs qui entrent dans la formule. Il vient

$$\int_0^{x_3} dx \int \varphi dx = V_0 \times 32,22.$$

On pouvait apprécier le $\frac{4}{10}$ de millimètre.

L'erreur possible est donc de $\frac{2}{10}$ de millimètre, soit de 2 pour 100 environ dans la première série de mesures

avec les déviations de l'ordre de 1^{cm} et de 3 pour 100 environ avec les déviations de l'ordre de 6^{mm} . Mais je crois l'approximation meilleure que celle que j'indique ici. Aussi je crois légitime de faire sur les nombres la correction que j'indique plus loin.

Les formules ne seront donc qu'approchées.

La disposition et les dimensions des différentes pièces du tube étaient les suivantes :

Les plateaux horizontaux étaient constitués par des plaques d'aluminium et les plateaux verticaux par de la toile d'aluminium.

La longueur des plateaux horizontaux était de $8^{\text{cm}},67$; leur écartement, de $1,55$.

La distance des bords antérieurs des plateaux horizontaux au plateau vertical V_1 était de $1,33$, et la distance des bords postérieurs au plan vertical postérieur V_2 , de 1^{cm} .

L'anode A était placée à $13,5$ du premier grillage et était percée d'un trou, sur lequel était tendu un fil de platine parallèle aux traits de la plaque.

L'ombre de ce fil se projetait sur le fond du tube. Les deux plateaux verticaux et l'anode étaient réunis au sol.

Le tube était alimenté par une machine Bonnetti à six plateaux, dont le débit était régularisé au moyen d'une forte batterie. Des tubes d'eau étaient interposés entre la batterie et le tube.

Les deux plateaux horizontaux étaient reliés aux bornes d'une batterie de petits accumulateurs.

La différence de potentiel entre la cathode et l'anode était mesurée au moyen de l'électromètre déjà décrit, tandis qu'on effectuait simultanément la lecture de la déviation.

La plaque de verre d'urane était divisée en millimètres.

	Déviatiou double 2γ .	$\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx.$	V.
	1,01	16 200	16 820
	1,05	15 600	16 190
	1,01	16 200	17 100
	0,97	16 900	18 110
	0,87	18 800	19 320
	0,94	17 200	17 930
	0,98	16 500	17 320
	0,97	16 700	17 510
	0,94	17 200	18 410
	0,85	19 100	19 750
Moyennes.	0,96	17 000	17 846
	1,16	18 600	20 260
	1,20	18 000	19 130
	1,23	17 600	18 230
	1,24	17 400	18 020
	1,35	16 000	17 120
	1,21	17 800	18 670
	1,19	18 100	19 580
	1,12	19 300	20 810
	1,05	20 600	21 670
	1,07	20 200	21 780
Moyennes.	1,185	18 400	19 527
	1,20	17 900	19 050
	1,22	17 600	18 670
	1,28	16 800	17 690
	1,30	16 500	17 380
	1,21	17 800	18 650
	1,23	17 400	18 720
	1,30	16 500	17 380
	1,29	16 600	17 960
	1,33	16 100	17 240
	1,22	17 600	18 680
Moyennes.	1,26	17 100	18 142

Les moyennes ainsi obtenues de V et de $\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx$ diffèrent l'une de l'autre de quantités importantes.

Il est intéressant de voir si, pour des déviations plus faibles se rapprochant par conséquent des conditions théoriques dans lesquelles le problème a été étudié, ces deux nombres ne se rapprocheraient pas l'un de l'autre.

Dans ce but, on a pris une différence de potentiel V_0 plus faible.

	Dévi- double tion 2γ .	$\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx.$	$V.$
	0,61	17 300	17 480
	0,76	13 900	14 520
	0,71	14 800	15 600
	0,55	19 100	19 780
	0,66	16 000	16 800
	0,65	16 200	17 430
	0,61	17 200	17 600
	0,60	17 600	17 860
	0,59	17 800	18 160
	0,56	18 800	18 580
Moyennes.	0,63	16 900	17 381
	0,61	17 500	17 820
	0,72	14 800	15 440
	0,63	16 900	16 740
	0,67	15 900	16 440
	0,62	17 200	17 260
	0,58	18 300	19 350
	0,55	19 300	19 530
	0,54	19 700	20 340
	0,52	20 400	20 940
	0,54	19 700	19 780
Moyennes.	0,60	18 000	18 370
	0,55	19 200	18 630
	0,67	15 800	16 980
	0,60	17 600	18 030
	0,55	19 200	18 630
	0,51	20 700	18 830
	0,50	21 100	20 550
	0,50	21 100	21 740
	0,51	20 500	20 600
	0,53	19 900	19 680
	0,58	18 200	18 080
Moyennes.	0,55	19 300	19 511

	Déviati double 2γ .	$\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx.$	V.
	0,53	19 900	20 040
	0,63	16 800	17 510
	0,69	15 300	15 900
	0,71	14 900	15 340
	0,66	16 000	16 500
	0,49	21 500	21 780
	0,53	19 900	19 750
	0,61	17 300	17 760
	0,66	15 900	15 610
	0,77	13 700	14 490
Moyennes.	0,63	17 100	17 468
	0,60	17 500	18 270
	0,59	17 800	18 720
	0,62	16 900	17 220
	0,60	17 300	17 090
	0,62	16 900	16 960
	0,62	16 900	16 750
	0,63	16 600	16 480
	0,65	16 100	17 290
	0,57	18 400	18 850
	0,60	17 500	17 940
Moyennes.	0,61	17 200	17 557
	0,60	18 300	18 720
	0,64	17 100	18 060
	0,67	16 300	17 230
	0,68	16 000	16 790
	0,69	16 000	16 500
	0,62	17 300	17 820
	0,59	18 200	18 720
	0,66	16 300	17 460
	0,67	16 000	16 840
	0,68	15 800	16 530
Moyennes.	0,64	16 800	17 467

On voit que pour ces déviations très faibles les deux valeurs de V et de $\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx$ se rapprochent beaucoup.

Ce sont ces déviations très faibles que nous devons préférer aux fortes déviations, puisque les formules sont établies en calculant le champ le long de l'axe, c'est-à-dire pour des déviations infiniment petites.

La moyenne de ces 60 dernières mesures donne pour

$$\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx, \quad \text{la valeur} \quad 17600,$$

$$V, \quad \text{la valeur} \quad 18000.$$

Nous trouvons une valeur de V supérieure à la valeur de $\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx$ comme on devait s'y attendre.

Faisons la correction indiquée. Il faudrait connaître la valeur de β , c'est-à-dire celle de φ . Pour avoir cette grandeur tout au moins approximativement, nous la déduirons de la formule de Schuster en prenant pour $\frac{e}{m}$ la valeur 1,75 que nous avons trouvée aux vitesses non nulles.

Ce calcul donne pour β la valeur 0,264.

En effectuant les corrections indiquées, on trouve pour $\frac{V_0}{2\gamma} \int dx \int \varphi dx$ les valeurs

17900,	d'après Lorentz,
17800,	d'après Abraham,
17800,	d'après Bücherer.

C'est la théorie de Lorentz qui donne la valeur qui se rapproche le plus de V . Elle n'en diffère que de 0,6 pour 100. La valeur que donne la théorie d'Abraham en diffère de 1 pour 100. Ces différences rentrent tout à fait dans les erreurs expérimentales.

Ceci démontre directement que l'emploi de la déviation électrostatique doit conduire, aux erreurs d'expériences près, au même résultat que l'emploi de la formule de Schuster.

Résumé. — En résumé, nous pensons avoir démontré que :

1° Les rayons cathodiques sont émis sous la différence de potentiel qui existe entre la cathode et l'anode, et que c'est à partir de la cathode même qu'ils reçoivent l'énergie cinétique qui leur est propre; cette démonstration a été faite soit en retranchant, soit en ajoutant une différence de potentiel fixe;

2° La mesure de $\frac{e}{m}$ par la méthode de Kaufmann-Simon donne une valeur plus faible que celle admise autrefois et voisine de $1,77 \cdot 10^7$, nombre qui se rapproche beaucoup des mesures extrêmement soignées de Kaufmann sur les rayons β du radium et des mesures de Classen et de Kurt Wolz sur les rayons cathodiques;

3° La divergence des résultats obtenus dans ces mesures ne peut être attribuée à l'emploi soit de la déviation électrostatique, soit de la formule de Schuster, puisqu'aux erreurs d'expérience près ces deux relations conduisent au même résultat.

En terminant, j'adresse mes sincères remerciements à tous ceux qui m'ont aidé dans ces recherches, en particulier à M. Thurneyssen, qui a fait exécuter avec beaucoup de soin les tubes qu'a nécessités ce travail, et à M. Gabriel Deménieux, qui a construit au laboratoire les appareils dont j'ai eu besoin.

Vu et approuvé :

Paris, le 11 juillet 1910.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 11 juillet 1910.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
L. LIARD.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Détermination des poids moléculaires par les densités
de vapeur.

Vu et approuvé :

Paris, le 11 juillet 1910.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 11 juillet 1910.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

THE THREE

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
46287 Quai des Grands-Augustins, 55.
